

光学 · Optics

• 目录

1. 期末复习(大一下)遗迹 / Optics Overview
↳ 含几何光学与波动光学初步等
2. 波动 & 电磁理论.
3. 色散
4. 光的传播. 散射. 折射.
5. 波的傅里叶理论. 波叠加. 群速度与相速度. 相干.
6. 偏振. 菲涅尔方程. 双折射. 旋光性. 调制. 琼斯矩阵.
7. 干涉. 高斯光束
8. 衍射. 瑞利判据. 光栅. 基尔霍夫理论. Fresnel 衍射.
9. 没写结语 

• reference :

- [1] Hecht <<Optics>>
- [2] SYSU. SPA. 光学 & 波动光学 课程 by 叶贤基教授.
- [3] SYSU. SPE. 光学课程.
- [4] 赵凯华的<<光学>>.

• Readme

1. 光学这门课程内容繁多, 且比较松散. 所以这份 Notes 并没有明显的主线.
2. 这只是我的笔记手稿, 杂七杂八什么都写... 有些题只截了图但没做 hhhhh...
3. 要学的话还是看教材. Hecht 的就行. 动一点就看 <<光学原理>>.

Optics Review

1. 光的本性: 波粒二象性.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{cases}$$

波动方程: $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ 3D 谐波解: $\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

光是横波. $E = vB$ $\vec{B} \perp \vec{E}$

能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ [W/m^2]

辐照度 $I = \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} E H = \frac{1}{2 \mu_0 c} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ [W/m^2]

由于 $I \propto E^2$, 有时使用相对光强 $I = E^2$.

2. 几何光学: 短波极限下的近似 ($\lambda \rightarrow 0$).

Def 光程 $L = n l$. l 为介质空间中光实际走过的距离.

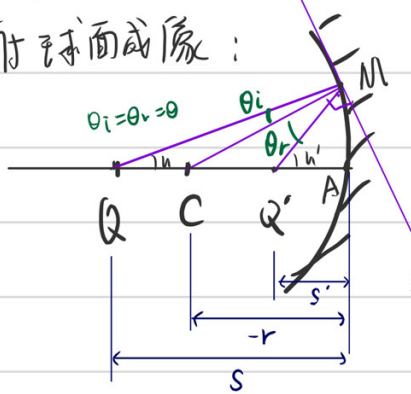
费马原理: $\delta L = \frac{dL}{db} = 0$. 费马原理中所谓“光走过的实际路径”实为“衍射零级极大”.

反射定律: $\theta_i = \theta_r$

折射定律: $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$

傍轴近似.

反射球面成像:



A 顶点. C 在 A 之左, $r < 0$, 反之 $r > 0$;

实正虚负; 图上标出的均为正数.

交角 u : 光由 $\frac{h\nu}{c}$ 光路为正, 反之为负.

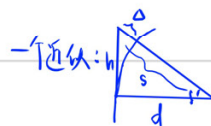
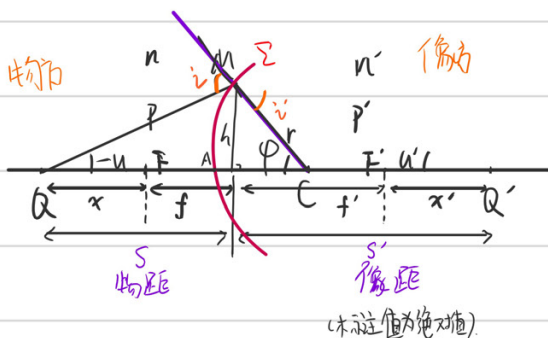
$$\begin{aligned} \frac{QC}{s \sin \theta} &= \frac{MC}{s \sin u} \\ \frac{Q'C}{s' \sin \theta} &= \frac{MC}{s' \sin u} \end{aligned} \Rightarrow \frac{QC}{Q'C} = \frac{\sin u'}{\sin u} \approx \frac{s+r}{-r-s'} = \frac{s}{s'}$$

傍轴近似: $\sin u \approx \tan u = \frac{MA}{s}$, $\sin u' \approx \frac{MA}{s'}$

$$\frac{s+r}{s} + \frac{s'+r}{s'} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}$$

s, s' 与 r 间关系: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}$

折射球面成像:



$$\Delta = s-d, \delta \rightarrow 0, s, d \text{ 很接近.}$$

$$h^2 = s^2 - d^2 = (s+d)(s-d) \approx 2d\Delta, \Delta \approx \frac{h^2}{2d}$$

$$\begin{cases} L_{am} - L_{aE} = n\Delta \approx n \frac{h^2}{2s} \\ L_{a'm} - L_{a'E} = n' \frac{h^2}{2s'} \end{cases}$$

$$\text{由等光程性, } \frac{n h^2}{2s} + \frac{n' h^2}{2s'} = (n'-n) A E \approx (n'-n) \frac{h^2}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r} \quad \leftarrow \text{高斯公式}$$

$$\text{令 } s \rightarrow \infty, s' = f = \frac{n'r}{n'-n}; \text{ 令 } s' \rightarrow \infty, f = \frac{n r}{n-n'}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1, f = \frac{n r}{n'-n}, f' = \frac{n' r}{n-n'}$$

$$\text{令 } x = s - f, x' = s' - f', \text{ 则 } \frac{x}{x+f} + \frac{x'}{x'+f'} = 1, \text{ i.e. } x x' = f f' \quad \leftarrow \text{牛顿公式}$$

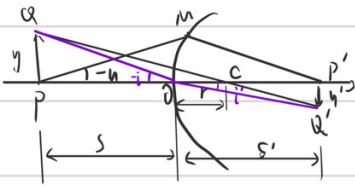
Def 光焦度 $\Phi = \frac{n' - n}{r}$ $\therefore \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \Phi$

空气中 $\Phi = \frac{n'}{f} = \frac{1}{f}$

$$\begin{cases} f' = \frac{n'}{\Phi} \\ f = \frac{n}{\Phi} \end{cases}$$

$$s = x + f, s' = x' + f'$$

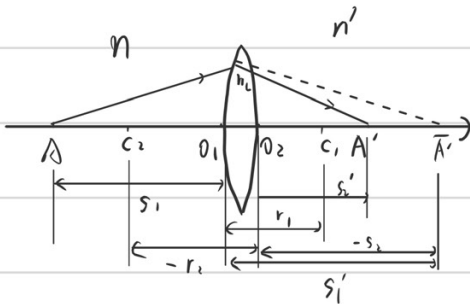
每轴放大率: $\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{ns} = -\frac{f's'}{fs} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$



$$\begin{aligned} \Phi \cdot h \sin(i) &= n's'i' \\ \sin i &\sim \tan i \sim \frac{y}{s} \\ \sin i' &\sim \tan i' \sim \frac{y'}{s'} \\ \Rightarrow \frac{ny}{s} &= \frac{n'y'}{s'} \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= -\frac{ns'}{ns} \end{aligned}$$

$$\beta = -\frac{f's'}{fs} = -\frac{f(x'+f')}{f'(x+f)} = -\frac{xx'+fx'}{f'(x+f)} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$$

薄透镜成像:



$$\textcircled{1} \frac{n}{s_1} + \frac{n_c}{s_1'} = \Phi_1$$

$$\textcircled{2} \frac{n_c}{s_2} + \frac{n'}{s_2'} = \Phi_2$$

薄透镜: $O_1O_2 \rightarrow 0, s_1 = s, s_1' = -s_2, s_2' = s'$

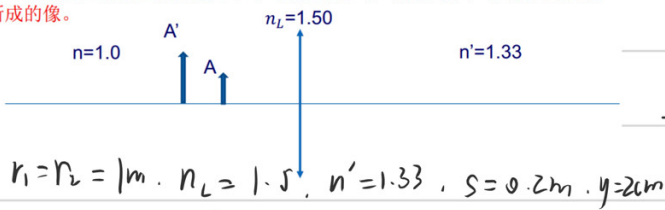
$$\Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2}: \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \quad \leftarrow \text{薄透镜的高斯公式}$$

$$\therefore \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_c - n}{r_1} + \frac{n' - n_c}{r_2}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } s \rightarrow \infty, f' &= \frac{n'}{\Phi} \\ \text{令 } s' \rightarrow \infty, f &= \frac{n}{\Phi} \end{aligned}$$

$$\text{当 } n = n' = 1 \text{ 时, } f = f' = \frac{1}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})(n_c - 1)}$$

一双凸透镜球面的曲率半径都是100cm, 透镜玻璃的折射率是1.5, 一高为2cm的物体在光轴上距透镜20cm, 物方为空气, 像方为水, 求物体经透镜所成的像。

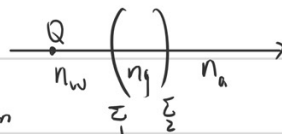


$$\Phi = \frac{n_c - n}{r_1} + \frac{n' - n_c}{r_2} = 0.67 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{由 } \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \Phi \text{ 得 } s' = \frac{n'}{\Phi - \frac{n}{s}} = -30.7 \text{ cm (虚像)}$$

$$y' = \beta y = -\frac{ns'}{ns} y = 2.31 \text{ cm. 放大, 正立.}$$

如图, 两球面半径为3cm, 两球面中心厚度(顶点距离)为2cm, 玻璃和水的折射率为1.5和1.33。透镜下4cm处有一个物点Q。计算两曲面的光焦度, 并计算Q点像的位置。



$$r_1 = -r_2 = 3 \text{ cm}, d = 2 \text{ cm}, n_g = 1.5, n_w = 1.33, n_a = 1, s_1 = 4 \text{ cm}$$

$$\text{组合公式: } \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{n_1 - n_w}{r_1}, \Phi_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_2} \\ \frac{n_w}{s_1} + \frac{n_a}{s_2} = \Phi \end{cases}$$

$$S = \chi_H = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{f_1 d}{d f_1 - f_2} = \frac{\frac{n_w}{\Phi_1} d}{d \frac{n_1}{\Phi_1} - \frac{n_2}{\Phi_2}} \textcircled{4}$$

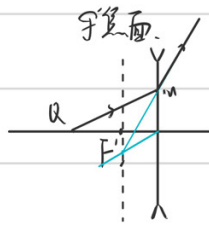
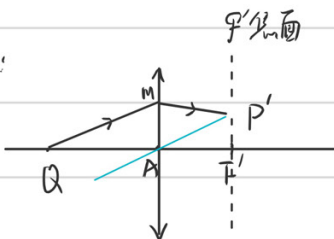
逐次成像法:

$$\frac{n_w}{s_1} + \frac{n_1}{s_1'} = \Phi_1 \textcircled{1} \text{ 解出 } s_1'$$

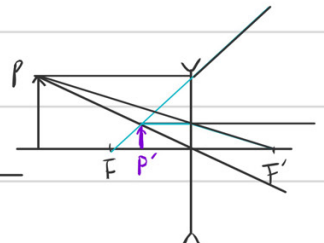
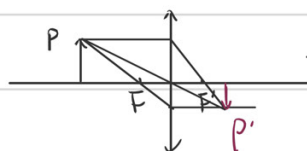
$$s_2 = s_1' + d \textcircled{2} \text{ 解出 } s_2$$

$$\frac{n_1}{s_2} + \frac{n_a}{s_2'} = \Phi_2 \textcircled{3} \text{ 解出 } s_2' \text{ 即可.}$$

侧面:



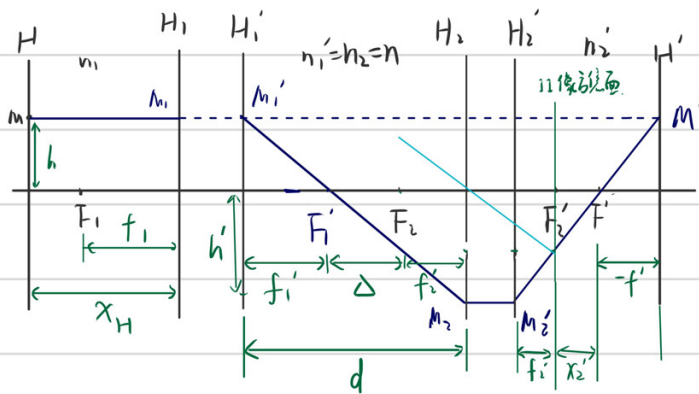
普通成像:



理想光具组：要保持光束的同心性。

三点两面

$$\begin{cases} f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \\ f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \end{cases} \quad \begin{cases} x_H = f_1 \frac{\Delta + f_1' + f_2}{\Delta} = \frac{f_1 d}{\Delta} \\ x_{H'} = f_2' \frac{\Delta + f_1' + f_2}{\Delta} = \frac{f_2' d}{\Delta} \end{cases}$$



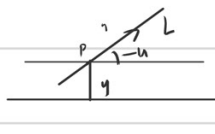
d : H_1 与 H_2 间距离, 可 <0 .

$\Delta = d - f_1' - f_2$, 可 <0 .

望远镜组: $d=0$, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

★ $\begin{cases} \frac{n_1'}{f_1'} + \frac{n_2}{f_2} = \Phi \\ \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2}{f_2'} = 1 \\ x_{H'} = f_2' \end{cases}$ 仍然成立.

矩阵理论略.



光轴

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} n u \\ y \end{pmatrix}$$

补一下.

3. 干涉与衍射

相干条件: 同频; 相位差恒定; 有平行分量

平面(线偏振)同向同频波的叠加: (仅考虑电场矢量; 不妨忽略时间项; $\vec{E}, \vec{F}$ 同向)

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{i k r_1}, \quad \vec{E}_2 = E_{02} e^{i k r_2}, \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} (e^{i k r_1} e^{i k r_2} + e^{i k r_2} e^{i k r_1}) \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos k(r_1 - r_2) \end{aligned}$$

i.e. $I = I_1 + I_2 + \underbrace{2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta}_{\text{干涉项}}, \quad \delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$, ΔL 为光程差.

若 $I_1 = I_2$, 则 $I = 2 I_1 (1 + \cos \delta) = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$

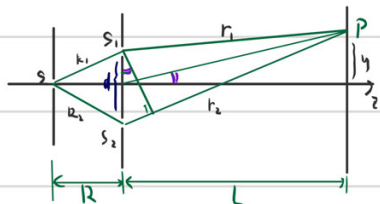
$$\begin{cases} \text{极大: } \Delta L = m \lambda \\ \text{极小: } \Delta L = (m + \frac{1}{2}) \lambda \end{cases}$$

杨氏双缝干涉:

加强条纹严格在

$$\Delta L = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta$$

i.e. $\Delta L = d \frac{y}{L}$



$$\frac{\Delta L}{R\lambda} \approx \frac{1}{R}$$

$$b_c = \frac{R\lambda}{d}$$

相移 $\Delta \theta$

$$\begin{cases} \text{极大: } d \frac{y}{L} = m\lambda \rightarrow y_b = m \frac{\lambda L}{d} \\ \text{极小: } d \frac{y}{L} = (m + \frac{1}{2})\lambda \rightarrow y_d = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda L}{d} \end{cases}$$

条纹间距 $e = \frac{\lambda L}{d}$

Def 条纹可见度: $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

此外 $V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = |\sin u|$ $\rightarrow$ 1. I_1 相差大, V 小, 条纹不可见;
2. 固定 d , b 越小, V 越大.

(其中 $u = \frac{\pi b d}{\lambda R}$)

多色光照射: $\lambda \sim \lambda + \Delta \lambda$

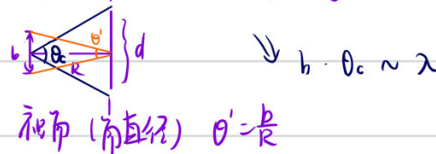
λ 的 $m+1$ 级亮纹与 $\lambda + \Delta \lambda$ 的 m 级亮纹重合时, 之外暗纹不可见

条件: $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta \lambda) \Rightarrow m = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$ 为最高可分辨级次

光源移动、空间相干、角直径; 相干孔径角; $b_c = \lambda \frac{R}{d}$, $b < \frac{1}{4} b_c$ 时 V 较大.

~ 记忆: 相干孔径角 $u = \pi$, 得 $b_c = \frac{\lambda R}{d}$

(干涉条纹) 相干角宽度: $\theta_c \approx \frac{d_c}{R} = \frac{\lambda}{b}$



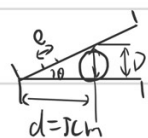
等倾、等厚干涉: $\Delta L = 2nh \cos i (+\frac{\lambda}{2})$

牛顿环; 增反、增透; 周期性. W 区域中心: 干涉均对比度最强处.

时间相干性: $\Delta \tau \Delta \nu = 1$; $\Delta L = c \Delta \tau$ 其中 $\Delta \nu = \Delta(\frac{1}{\lambda}) = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$

在两玻璃板之间夹一细丝形成空气膜, 用波长为 500nm 的单色光垂直照射时, 测得干涉条纹间距为 0.5mm. 劈棱至细丝距离是 5cm, 求细丝的直径. 若将细丝向棱边靠近或移远, 干涉条纹有何变化?

相邻条纹之间的路程差



$\lambda = 500 \text{ nm}$, 间距 $e = 0.5 \text{ mm}$

$\Delta L = 2nh$ 条纹变化 λ 时, $\Delta h = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2}$

$$\begin{cases} \frac{\Delta h}{e} = \frac{\lambda}{2e} = \sin \theta \sim \theta \\ \frac{p}{d} = \tan \theta \sim \theta \end{cases} \Rightarrow D = \frac{\lambda d}{2e} = 25 \mu\text{m}$$

细丝向棱边靠近时, 条纹间距 $\downarrow$, $D = \frac{\lambda d}{2e}$ 不变.

其中 $\frac{\lambda}{2}$ 不变, $N = \frac{d}{e}$ 恰为棱端到细丝上的条纹总数不变.

等厚干涉: $\Delta L = 2nh \cos i (+\frac{\lambda}{2})$

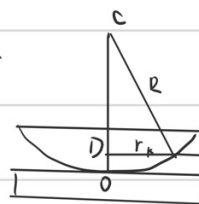
$2nh \cos i_k = k\lambda$

$2nh \sin i_k \delta i = \lambda$

$\Rightarrow \delta i = \frac{\lambda}{2nh \sin i}$

越向外 / h 越大, 条纹越高.

牛顿环



$$\begin{aligned} ① R^2 &= r_k^2 + (R - h_k)^2 \\ \Rightarrow 2h_k R &= r_k^2 + h_k^2 \approx r_k^2 \\ \Rightarrow r_k &= \sqrt{2h_k R} \end{aligned}$$

② $\Delta L = 2nh_k = 2h_k (+\frac{\lambda}{2})$ ($i \approx n=1$)

$2h_k = k\lambda$, 得 $r_k = \sqrt{kR\lambda}$

若要求 R : $\begin{cases} r_k^2 = k\lambda R \\ r_{k+m}^2 = (k+m)\lambda R \end{cases} \Rightarrow R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda}$

例 用紫色光 ($\lambda = 4000 \text{ \AA}$) 观察牛顿环时, 测得某暗环半径为 $r_m = 4 \text{ mm}$, 由此向外数第五暗环的半径为 $r_{m+5} = 6 \text{ mm}$, 求透镜凸面的曲率半径.

$R = \frac{r_{m+5}^2 - r_m^2}{m\lambda} = 10 \text{ m}$

• 时间相干性: $T_0 \Delta \nu = 1$, T_0 为相干时间, $\Delta \nu$ 为频宽 ($\Delta \nu = 2\pi \Delta \omega$)

由 $c = \nu \lambda$, 得 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\Delta \nu = -\frac{c \Delta \lambda}{\lambda^2}$

$\therefore T_0 = \frac{1}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}$; 相干长度 $L_0 = c T_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$
(波3个长度)

平面电磁波 $\vec{E} = \vec{E}_0 * e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} * e^{-i\omega t}$

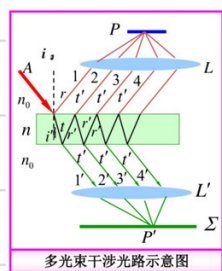
球面电磁波 $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r} * e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} * e^{-i\omega t}$

这题帮帮忙!

▪ 时间相干(和 ω 相关): 光场中同一位置的两个不同时刻的振动的相关性(纵向相干性)。与谱不纯(非单色性, ω 不是常数)相关联

▪ 空间相干(和 k 相关): 光场中同一时刻横向两个不同位置的振动相关性(横向相干性)。与波前畸变(非点光源, 波前偏离平面波和球面波)相关联。

• 多光束干涉: 设入射光 $\vec{E} = A e^{i\phi} = A$, 相位为 0 ; Stokes 关系 $R+T=1$, $r=-r'$, $R=r^2$, $T=tt'$
相邻两光束光程差 $\Delta = 2nh \cos i'$, 相位差 $\delta' = 2kn h \cos i' = \frac{4\pi n h \cos i'}{\lambda}$



各反射光束的振幅

1 2 3 4
 $A r, A t r' t', A t r'^2 t', A t r' r'^2 t', \dots$

各透射光束的振幅

1' 2' 3' 4'
 $A t t', A t r'^2 t', A t r'^4 t', A t r'^6 t', \dots$

每两相邻光束的后一束比前一束多经历的光程

$\Delta = 2nh \cos i'$

反射光 $\begin{cases} \vec{E}_1 = r A e^{i\phi} \\ \vec{E}_2 = t t' r' A e^{i\delta} \\ \vec{E}_3 = t t' r'^2 A e^{i2\delta} \\ \dots \end{cases}$

透射光 $\begin{cases} \vec{E}_{1'} = t t' A e^{i\phi} \\ \vec{E}_{2'} = t t' r'^2 A e^{i\delta} \\ \vec{E}_{3'} = t t' r'^4 A e^{i2\delta} \\ \dots \end{cases}$

总 $\vec{E}_T = \sum_{j=0}^{\infty} t t' A r'^{2j} e^{i\delta j} = \frac{t t' A}{1 - r'^2 e^{i\delta}}$

$I_T = \vec{E}_T^* \vec{E}_T = \frac{(1-R)^2 I_0}{(1-R^2 e^{i\delta})(1-R^2 e^{-i\delta})} = \frac{(1-R)^2 I_0}{1 + R^4 - 2R^2 \cos \delta} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$

$\Rightarrow I_R = I_0 - I_T = I_0 \frac{\frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}{1 + \frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$

$1 - \cos \delta = 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$
 $1 + R^4 - 2R^2 \cos \delta = 1 + R^4 - 2R^2 (1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2})$
 $= 1 - 2R^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} + R^4$
 $= (1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}$

$\delta = \frac{4\pi n h \cos i'}{\lambda_k}$

含折射角 i , 波长 λ , 膜厚 h

I_T 随 δ 呈周期性变化, 设半峰宽为 ϵ

令 $\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{2}$, 此时 $\sin^2(\frac{\delta}{2}) = \sin^2((2k+1/2)\pi/2) = \sin^2 \frac{\pi}{4} = (\frac{\epsilon}{\pi})^2$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}} \Rightarrow \epsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$ 为半峰宽 ①

② 峰宽: $F = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$

③ 半峰宽: 由 $\delta = 4\pi n h \cos i' / \lambda$
微分 $\delta \delta = 4\pi n h \sin i' di' / \lambda$

令 $\delta \delta = \epsilon$, 则 $|di'| = \frac{\lambda}{4\pi n h \sin i'} \cdot \frac{1-R}{\pi}$

④ 色散: 由亮纹条件, $\delta = 2nh \cos i = m\lambda$

微分: $-2nh \sin i di = m d\lambda$
 $\Rightarrow \frac{di}{d\lambda} = \frac{-m}{2nh \sin i} = \frac{-1}{2nh \sin i} \cdot \frac{2nh \cos i}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda \tan i}$

$D_i = \left| \frac{di}{d\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda \tan i}$

⑤ 自由光谱范围: $\Delta \lambda_{sr}$

$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta \lambda)$

$\Rightarrow \Delta \lambda_{sr} = \frac{\lambda}{m}$

又 $m\lambda = 2nh \cos i$, $m = \frac{2nh \cos i}{\lambda}$

$\therefore \Delta \lambda_{sr} = \frac{\lambda^2}{2nh \cos i}$

⑥ 色分辨率: 谱线有宽度, 互相靠得太近就分辨不出来

$\Delta i = \frac{di}{d\lambda} \Delta \lambda = D_i \Delta \lambda$

当 $\Delta i = \Delta i_c$ 时,

$|\Delta \lambda| = \delta \lambda$ 为最大可分辨波长差

$\therefore \delta \lambda = \lambda \tan i \cdot \frac{\lambda}{2nh \sin i} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}}$
 $= \frac{\lambda^2 (1-R)}{m \lambda \pi \sqrt{R}} = \frac{\lambda (1-R)}{m \pi \sqrt{R}} = \frac{\lambda}{m \pi \sqrt{R}}$

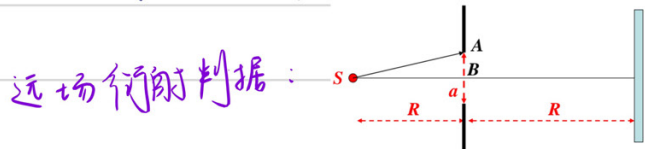
分辨率: $Q = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{m \pi \sqrt{R}}{1-R} = m F$
(品质因子)

图 3-64 干涉条纹的半峰宽度

• 圆孔衍射. 艾里斑 半径: $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, D 为孔直径

角半径 $\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

由瑞利判据, 分辨率极限 $\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, 线极限 $\delta l = f\delta\theta = 1.22 \frac{f\lambda}{D}$



远场衍射判据:

$R > \frac{a^2}{\lambda}$

菲涅耳衍射光场: $|E| = \begin{cases} \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2}, & m \text{ 奇} \\ \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2}, & m \text{ 偶} \end{cases}$ m 为半波带数.

$\approx \begin{cases} |E_1|, & m \text{ 奇} \\ 0, & m \text{ 偶} \end{cases}$

半波带数: $n = \frac{r_2^2(R+r_0)}{\lambda r_0 R}$. r_2 为孔径, R 为点光源到孔中心的距离, r_0 为孔到场点距离. (波面曲率半径).

平行光: $R \rightarrow \infty, n = \frac{r_2^2}{\lambda r_0}$

N 缝衍射: $I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} \right)^2$ [$N=1$ 为单缝, $N=2$ 为双缝略]

若 $a = mb$, 则 单缝衍射峰内有 $2m$ 个主极大.

缝间距 $\uparrow$ 缝宽 $\uparrow$

缺级: 干涉主极大 vs 衍射极小. i.e. $\beta = m'\pi$ vs. $\alpha = m\pi \Rightarrow \frac{b}{m'} = \frac{a}{m}$ 时. $\Rightarrow$ 主极大缺级级数 $m = m' \frac{a}{b}$

每两主极大间有 $N-2$ 个次极大.

4-22. 用坐标纸绘制 $N=6, d=1.5a$ 的夫琅禾费衍射强度分布曲线, 横坐标取 $\sin\theta$, 至少画到第 4 级主极大, 并计算第 4 级主极大与单缝主极大之比.

$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} \right)^2$, 其中 $\beta = \frac{ka \sin\theta}{2}, \alpha = \frac{k d \sin\theta}{2}$

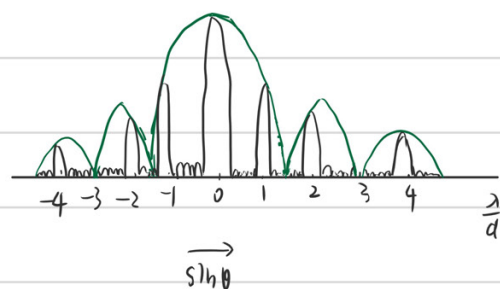
$N=6$ 时, 主极大 $\alpha = m\pi \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$, 此时 $\beta = m\pi \frac{a}{d} = \frac{2}{3}m\pi$

单缝主极大: $m=0 \rightarrow \theta=0, \beta=0, I = N^2 I_0 = 36 I_0$

第 4 级主极大: $m=4 \rightarrow \sin\theta = \frac{4\lambda}{d}, \beta = \frac{8}{3}\pi, I = 36 I_0 \cdot \frac{27}{256\pi^2}$

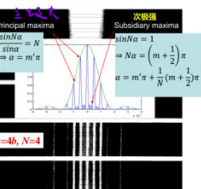
外各级极大: $\beta = (m' + \frac{1}{2})\pi$, 极小 $\beta = m'\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{m'\lambda}{a} = \frac{3}{2} \frac{m'\lambda}{d}$

缺级: $m = \frac{d}{a} m'$ 发生在 $m = \pm 3, \pm 6 \dots$



• 光栅: 光栅方程 $a \sin\theta_m = m\lambda$, 多缝衍射光强 $I = I_0 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2$. $\alpha = \frac{ka \sin\theta}{2}, \beta = \frac{kb \sin\theta}{2}$, a 为缝间距, b 为缝宽

理论与实验结果对比



① 主极大半角宽

其次极大, $\sin N\alpha = 0, \alpha = \frac{k a \sin\theta}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{Na}$

$d \gg \lambda, d \gg a: \Delta\theta = \frac{\lambda}{Na \cos\theta_m}$

② 衍射.

主极大, $\alpha = m\pi = \frac{ka \sin\theta_m}{2} = \pi a \sin\theta_m / \lambda$

$\Rightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{a}$

$d \cos\theta_m = \frac{b}{a} d \lambda$

$D_0 = d\theta/d\lambda = \frac{b}{a \cos\theta_m} \Rightarrow D_0 = \frac{d}{\lambda} \neq D_0 = \frac{f}{a \cos\theta_m}$

③ 色分辨本领 $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$

$\Delta\lambda$ 为最短可分辨波长, λ 为平均波长.

$\delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \delta\lambda = D_0 \delta\lambda = \frac{m}{a \cos\theta_m} \delta\lambda$

当 $\delta\theta = \Delta\theta$ 时, $\delta\lambda = \Delta\lambda$

故 $\Delta\lambda = \frac{a \cos\theta_m}{m} \cdot \frac{\lambda}{Na \cos\theta_m} = \frac{\lambda}{mN}$

$\therefore A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$

④ 自由光谱范围: $\Delta\lambda_{sr} = \frac{\lambda}{m}$

⑤ 闪耀光栅:

反射光栅的光栅方程: $a(\sin\theta_i - \sin\theta_r) = m\lambda$

反射率无干涉:

衍射零级: 垂直入射时, 集中大部分光强.

干涉零级: 垂直入射时, 无干涉.

零级无干涉 $\Leftarrow$

FP腔 vs. 光栅

半角宽

角色散

色分辨率

自由光谱范围

· 偏振

$$\text{偏振度 } P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_p}{I_p + I_n}$$

$$\text{线偏: } \vec{E} = (iE_x + jE_y) \cos(kz - \omega t) \quad \text{非偏振光}$$

$$\text{圆偏: } \vec{E}_x = iE_0 \cos(kz - \omega t), \vec{E}_y = jE_0 \cos(kz - \omega t \pm \frac{\pi}{2})$$

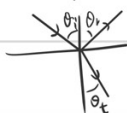
$$\vec{E} = E_0 [\hat{i} \cos(kz - \omega t) \pm \hat{j} \sin(kz - \omega t)] \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 0, y \text{ 落后, 左旋} \\ \varepsilon < 0, y \text{ 领先, 右旋} \end{array} \right.$$

$$\text{自然光/非偏振光: } I = \frac{1}{2} I_0$$

$$\text{马吕斯定律: } I_{\text{透}} = I_0 \cos^2 \theta$$

菲涅尔方程: 留吧

$$\text{布儒斯特角: } \theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \theta_i = \theta_p = \arctan \frac{n_2}{n_1}, \text{ 此时 } r_{\parallel} = 0$$



$$\begin{aligned} \text{由 } n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t \\ &= n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_i) \\ &= n_2 \cos \theta_i \\ \Rightarrow \theta_i &= \arctan \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

双折射:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{负晶体: } v_o < v_e, n_o > n_e \\ \text{正晶体: } v_o > v_e, n_o < n_e \end{array} \right. \quad \text{作为波片材料时, 通过后 O 光相位落后}$$

e.g. 方解石, 冰洲石.
og 石英.

表 6-3 各种偏振光经过 $\lambda/4$ 片后偏振态的变化

入射光	$\lambda/4$ 片光轴取向	出射光
线偏振	e 轴或 o 轴与偏振方向一致*	线偏振
	e 轴或 o 轴与偏振方向成 45° 角	圆偏振
圆偏振	其它取向	椭圆偏振
椭圆偏振	任何取向	线偏振
	e 轴或 o 轴与椭圆主轴一致	线偏振
	其它取向	椭圆偏振

* 由于沿这两个特殊方向振动的线偏振光在波晶片内根本不分解, 它们从波晶片射出时仍然是沿原振动方向的线偏振光。

由于自然光和部分偏振光是一系列偏振方向不同的线偏振光组成的, 它们经过 $\lambda/4$ 片后有的仍是线偏振光, 有的是圆偏振光, 而大部分是长短轴比例各不相同的椭圆偏振光, 这时出射光在宏观上仍是自然光或部分偏振光。

表 6-4 偏振光的检验

第一步	令入射光通过偏振片 I, 改变偏振片 I 的透振方向 P_1 , 观察透光强度的变化 (图 6-58a)			
观察到的现象	有消光	强度无变化		强度有变化, 但无消光
结 论	线偏振	自然光或圆偏振		部分偏振或椭圆偏振
第二步	a. 令入射光依次通过 $\lambda/4$ 片和偏振片 II, 改变偏振片 II 的透振方向 P_2 , 观察透射光的强度变化 (6-58b)			
	b. 同 a, 只是 $\lambda/4$ 片的光轴方向必须与第一步中偏振片 I 产生的强度极大或极小的透振方向重合			
观察到的现象	有消光	无消光	有消光	无消光
结 论	圆偏振	自然光	椭圆偏振	部分偏振

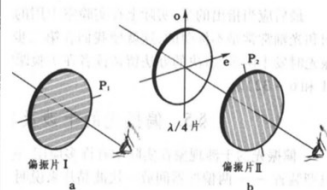


图 6-58 偏振态的检验

· 色散

$$\text{· 相速度与群速度: } v = \frac{\omega}{k}, v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\text{群折射率 } n_g = \frac{c}{v_g} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

↑

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega} \Rightarrow dn = \frac{ck}{\omega^2} d\omega + \frac{c}{\omega} dk$$

$$\therefore \omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{ck}{\omega} + c \frac{dk}{d\omega} = \frac{c}{v_g} - \frac{c}{v}$$

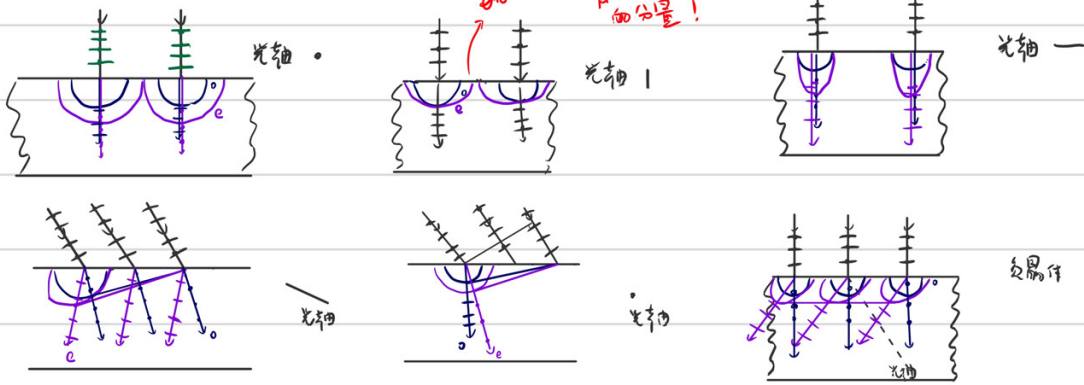
$$\therefore \frac{c}{v_g} = \frac{c}{v} + \omega \frac{dn}{d\omega} = n_g$$

$$\text{以 } \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \text{ 代替 } \omega, \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow n_g = n + \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \frac{dn}{d\omega} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{d\lambda} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad \square$$

惠更斯作图法

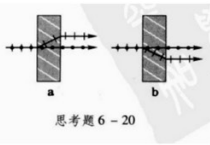
负晶体中: $v_o < v_e$



正入射, k 与光轴不 $\parallel$ 或不 $\perp$ 时,

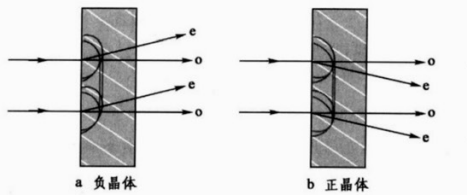
6-20. 在本题图中白线代表光轴, 试根据图中所画的折射情况判断晶体的正负。

答: 如下图, 用惠更斯作图法分别作出正负晶体中o光和e光的折射方向, 与本题图比较即可判断出: 图a是负晶体, 图b是正晶体。



思考题 6-20

正晶体: e光偏向光轴
负晶体: e光偏离光轴



波动 & 电磁理论

1D 波动:

我们在这里想要定出波动方程必定具有的形式。为此，设想某个这样的扰动 ψ 以恒定的速率 v 沿正 x 方向运动。扰动的具体本性暂时不重要。它可以是图 2.2 中弦线的垂直位移，也可以是一个电磁波的电场或磁场的大小（或者甚至是物质波的量子力学概率振幅）。

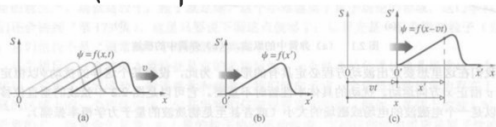


图 2.3 运动参考系

对 $f(x,t)$, $\psi|_{t=0} = f(x,0) = f(x)$ 只与 x 有关.

$x' = x - vt$. 在 S' 中 $\psi = f(x')$ 与 t 无关. 故 $\psi(x,t) = f(x-vt)$ (向 x^+ 方向传播).

∴ 在扰动中, $x \mp vt$ 以一个整体出现在函数中.

一个一维波动需要 振幅 + 频率 或 波长 来布定.

扰动对时间依赖与对空间依赖的关系:

$$\text{令 } x' = x - vt, \text{ 有 } \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \end{cases} \quad \text{则 } \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (-v \frac{\partial f}{\partial x'}) = -v \frac{\partial}{\partial x'} (\frac{\partial f}{\partial t}) \\ &= -v \frac{\partial}{\partial x'} (\frac{\partial \psi}{\partial t}) = -v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = -v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned} \right. \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{波动方程}) \end{aligned}$$

C-1D 波动 Eqn. (E 解) 它的解可写作 $\psi(x,t) = C_1 f(x-vt) + C_2 f(x+vt)$

如果代表一个波的函数是这个方程的解，它将同时是 $(x \mp vt)$ 的函数——特别是，是一个可以既对 x 又对 t 以非平庸方式求二次微商的函数。

是量: ω 角频率 T 周期 $\omega T = 2\pi$
 k 角波数 λ 波长 $k\lambda = 2\pi$
 ν 频率 $\nu = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi\nu$
 K 波数 $K = \frac{1}{\lambda}$
 v 波速 (相速) $v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$ $\frac{\omega}{k} = v$

eg: $\psi(x,t) = \exp[-4a(x - \sqrt{\frac{b}{4a}}t)^2]$
 能否描述一个波?
 $\therefore \psi(x,t) = \exp[-4a(x - \sqrt{\frac{b}{4a}}t)^2]$
 $= f(x - \sqrt{\frac{b}{4a}}t)$
 $\therefore$ 可以. 波速 $v = \sqrt{\frac{b}{4a}}$. 向 x^+ 方向传播

一个简谐波函数: $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon)$ 自变量为相位 $\phi = kx - \omega t + \varepsilon$

$$\tilde{\psi}(x,t) = A e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)} = A e^{i\phi}$$

$$\text{有 } \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_x = -\omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_t = k \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \Big|_{\phi} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \text{ 为相速度}$$

• 相矢量: $A < \psi$

幅为 A , 与 x 轴的夹角为相位 ϕ

• 高维简波: $\tilde{\psi}(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

平面波的相速度 $\Leftrightarrow$ 波阵面传播速度. 任一波阵面上扰动为常量.

虽然复数表示在现代物理学中已很常见，但在应用它时必须小心：在将一个波表示为一个复数函数，然后用这个函数或对这个函数进行运算之后，只有在这些运算限于加减法、乘或除以一个实数，以及对一个实变量进行微分和/或积分时，才能恢复实部法运算（包括矢量点乘和叉乘）必须仅仅与实数量进行。乘复数量后取实部会得出错误（见习题 2.47）。★

• 高维波动方程: $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, 解 $\psi(\vec{r}, t) = C_1 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) + C_2 f(\vec{k} \cdot \vec{r} + vt)$

↳ 特例: 球面波, $\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, t)$, $\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) \rightarrow$ 波 $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

(球坐标中, $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$)

• 平面波: $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$

• 运动电荷受力: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

我们将会看到, 电场既由电荷产生, 又由时变的磁场产生。类似地, 磁场既由电流产生, 又由时变的电场产生。 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的这种相互依赖性描述光的关键。

• 磁通量: $\Phi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S}$

• 感生电动势: $\text{emf} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

用非常一般的术语来说, 电动势是一个电势差, 它是单位电荷的势能之差。每单位电荷的势能之差相当于对单位电荷做的功, 它是每单位电荷受的力乘距离, 即电场乘距离。电动势只有当电场出现时才存在:

$\text{emf} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (3.3)

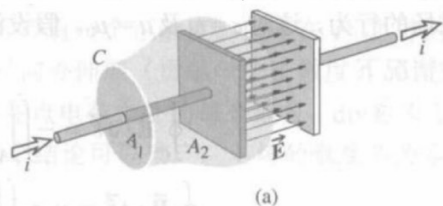
$\rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ ($\vec{B}$ 为一随时间、空间变化的磁场)

• 电场的高斯定律 $\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$, $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}$, 介电常数替换为 ϵ

• 磁场的高斯定律 $\Phi_m = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (无磁单极)

• 安培环路定律: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{S}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$ 为真空磁导率, 介质中 μ_0 换为 μ .

虽然方程 (3.10) 常常已经够用了, 但是它还不是全部。安培定律并不对所用的面作什么特别规定, 只要它以曲线 C 为边界即可。这在对电容器充电时会产生一个明显的问题 (见图 3.11a)。若选用的面是图中的平坦面 A_1 , 有一个净电流流过它, 沿曲线 C 有一个 $\vec{B}$ 场。方程 (3.10) 右边不为零, 因此左边也不为零。但是若选用 A_2 为以 C 为边界的面, 那么没有净电流流过它, 磁场必须为零, 尽管并没有什么物理情况实际发生变化。显然有什么事不对头!

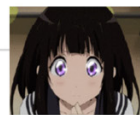


为了解决这种困境, 考虑电容器, $E = \frac{Q}{\epsilon A}$, 电容器充/放电时, 会产生磁场吗!

对电容 C , $\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{A}$ 实为位移电流密度

Def 位移电流密度, $\vec{j}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

修正的安培环路定律: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_A (\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$; 电荷守恒: $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$



• 欧姆定律: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, σ 为介电电导率.

• Maxwell Eqn:

$$\begin{cases} \oint_A \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_V \rho dV \\ \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

微分形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} & (1) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (2) \text{ 没有磁单极} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

由 $\nabla = i\vec{k}$ 可得以下结论: (无源, 真空)

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon \omega \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \end{cases}$$

• 修正安培定律的式子：由(1) $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ，由(1) $\rho = \epsilon \nabla \cdot \vec{E}$ ，代入得 $\nabla \cdot (\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$ 。
 → $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 。把定义为新的电流密度。

Def 电位移矢量 $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 。(线性、均、各向同性介质)

对(4)求旋度： $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 (\nabla \times \vec{E}) + \mu \epsilon (\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ ↗ 换次序

$$= \mu_0 (\nabla \times \vec{E}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

又 $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$

∴ $\nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

同样， $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

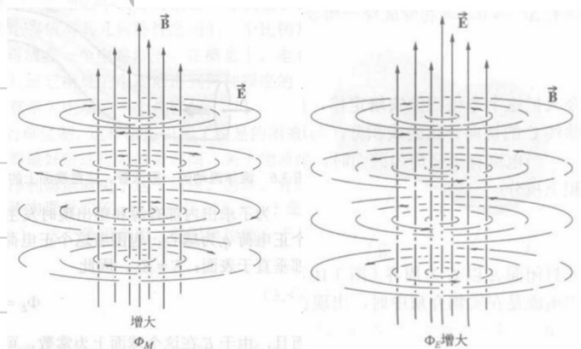
又 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla (\frac{\rho}{\epsilon}) - \nabla^2 \vec{E}$

∴ $\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla (\frac{\rho}{\epsilon})$

都是有波动方程形式!!!

我们将对电磁波方程的完整和数学上优美的推导放在附录 A 中。这里将注意力集中在一个同等重要的任务上：更直观地理解涉及的物理过程。容易看到三点：场的普遍的直交性、麦克斯韦方程组的对称性和这些方程中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的互相依赖性。从这三点，我们容易建立一幅定性图像。

更恰当的看法是把 $\vec{E}$ 场和 $\vec{B}$ 场看成单一物理现象——电磁场的两个侧面，电磁场的源是运动电荷。一旦电磁场中产生了扰动，这个扰动就成为一个不受束缚的波，脱离波源独立运动。时变的电场和磁场被束缚为一个整体，在无穷无尽的循环中互相重新产生。从离我们较近的仙女座星云（它可以用肉眼看到）来到我们这里的电磁波，已经飞行了 2 200 000 年。



3.5 一个时变的 $\vec{B}$ 场。围绕 Φ_M 正在变化的每一点， $\vec{E}$ 场构成封闭环路。想象一个被 $\vec{E}$ 推动的电流，它将感生一个 $\vec{B}$ 场，方向向下，反对引发它的向上 $\vec{B}$ 场的增大

图 3.12 一个时变的 $\vec{E}$ 场。环绕 Φ_E 发生变化的每一点， $\vec{B}$ 场形成闭环。考虑 (3.12) 式，一个增大的方向朝上的电场（等价于）一个向上的位移电流，按照右手定则，感生 $\vec{B}$ 场的方向为向下看时是逆时针旋转

自由空间中： $\begin{cases} \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$

$\mu \mu_0 \cdot \epsilon = \epsilon_0$
 $\rho = 0 \cdot \sigma = 0$

于是波速 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$\epsilon_0 \mu_0 \approx (8.85 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ C}^2 / \text{m}^3 \cdot \text{kg}) \cdot (4\pi \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg} / \text{C}^2)$

$= 11.12 \times 10^{-18} \text{ s}^2 / \text{m}^2$

∴ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} !!!$

这个速度 [即他的理论预言值] 与光速如此接近，看来我们有充分理由得出结论说，光本身（包括辐射热和其他种种辐射）是一种电磁扰动，它依照电磁学定律以波的形式穿过电磁场传播。

例题 3.1 一个正弦电磁波，振幅为 1.0 V/m，波长为 2.0 m，在真空中向正 z 方向行进。
 (a) 若 E 场在 x 方向并且 $\vec{E}(0,0)=0$ ，写出 $\vec{E}(z,t)$ 的表示式。
 (b) 写出 $\vec{B}(z,t)$ 的表示式。
 (c) 证明波的传播方向是 $\vec{E} \times \vec{B}$ 。

解 (a) $\vec{E}(z,t) = \hat{i} (1.0 \text{ V/m}) \sin k(z - ct)$ ，其中 $k = 2\pi/\lambda = \pi$ 。因此 $\vec{E}(z,t) = \hat{i} (1.0 \text{ V/m}) \sin \pi(z - ct)$ 。

注意 E 场是在 x 方向并且 $\vec{E}(0,0)=0$ 。

(b) 由 (3.30) 式， $E = cB$ ， $\vec{B}(z,t) = \hat{j} (1.0 \text{ V/m}) / c \sin \pi(z - ct)$

(c) $\vec{E} \times \vec{B}$ 在 $\hat{i} \times \hat{j}$ 的方向，这是基矢 $\hat{k}$ 的方向或 z 方向。

横波：假设波沿 x 轴方向传播，则横波 $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ 。即当 (x, t) 定时， $\vec{E}$ 与 y, z 无关

自由空间中 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 即为 $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ 则 $E_x = \text{const.}$

考虑平面波，假设 $\vec{E} \parallel y$ 轴，则 $\vec{E} = \hat{j} E_y(x, t)$ ， $E_x = E_z = 0$

$$\text{由 } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ 得 } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \text{ 则 } B_x, B_y = \text{const}$$

$$\text{讨论简谐波: } E_y(x, t) = E_{0y} \cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varepsilon]$$

$$\text{则 } B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -\frac{E_{0y} \omega}{c} \int \sin[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varepsilon] dt = \frac{E_{0y}}{c} \cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varepsilon]$$

由于 E_y 和 B_z 只差一个标量因子，因而具有相同的时间依赖关系，而且 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 在空间一切点同相。此外， $\vec{E} = \hat{j} E_y(x, t)$ 和 $\vec{B} = \hat{k} B_z(x, t)$ 互相垂直，它们的叉乘积 $\vec{E} \times \vec{B}$ 指向传播方向 $\hat{i}$ (图 3.14)。

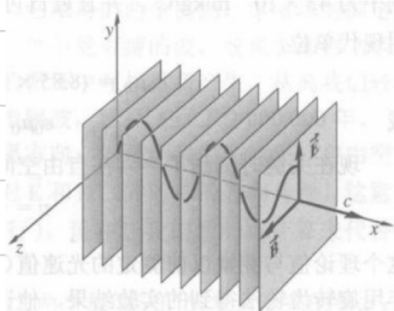
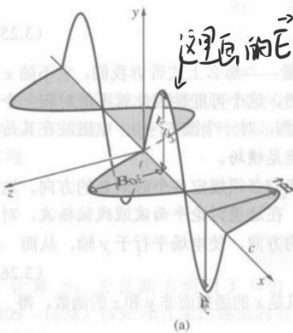


图 3.13 一个在真空中行进的平面简谐电磁波中电场的图像

$$\therefore E_y = c B_z \quad \therefore \vec{E} = c \vec{B}$$

介质中， $E = vB$ ， $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ 为介质中的波速



这里画的 $\vec{E}, \vec{B}$ 只表示振幅及其方向。而 $E_x = E_z = 0, B_y = B_x = 0$ 。

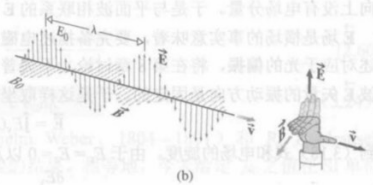


图 3.14 (a) 一个偏振平面波的正交的简谐 $\vec{E}$ 场和 $\vec{B}$ 场。(b) 波向 $\vec{E} \times \vec{B}$ 方向传播

选取同一 x 轴的平面上任一点，两平面上的 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 均相同。

能量 & 动量

(真空中) 电场能量: $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ (能量密度)
磁场能量: $u_B = \frac{1}{2} \mu_0 B^2$

由 $E = cB$, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 得 $u_E = u_B$

故以电磁波形式流过空间的能量: $u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$ [J/m^3]

能流密度 S : 每单位时间穿过单位面积传递的能量

$$S = \frac{u \cot A}{\Delta t \Delta A} = u c = \frac{1}{\mu_0} E B = c^2 \epsilon_0 E B \quad [\text{W/m}^2]$$

以波的传播方向为 S 方向，则 $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$

($\vec{S}$ 称为坡印廷矢量)

J.H. Poynting

在继续往下讲之前应当指出，量子力学认为，与电磁波相联系的能量实际上是量子化的，不是连续的。尽管如此，在通常情况下，经典理论仍然工作得很好，因此我们将继续将光波当作某种能够填满空间区域的连续“物料”来谈论。

现在将以上考虑用于一个在 $\vec{k}$ 方向穿过自由空间的线偏振(电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 的方向固定)的简谐平面波:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.41)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.42)$$

用 (3.40) 式，得到 $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.43)$

这是单位时间穿过单位面积的能量瞬时流动。

对周期函数求平均: $f(t)$ 在 T 上的平均值 $\langle f(t) \rangle_T$, $\langle f(t) \rangle_T := \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t) dt$

对 $e^{i\omega t}$, $\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \Big|_{t-T/2}^{t+T/2} = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} (e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2})$
 $= \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right) e^{i\omega t}$

$\therefore \begin{cases} \langle \cos \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \cos \omega t \\ \langle \sin \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \sin \omega t \end{cases}$

$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T \xrightarrow[T \gg 1]{T=2}$

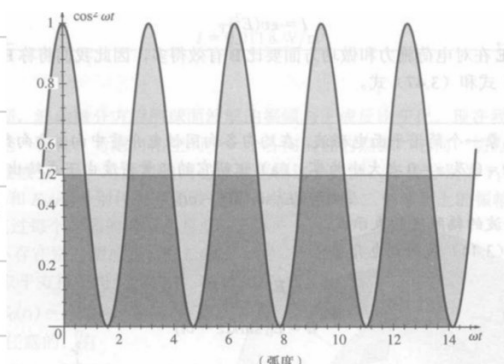


图 3.18 用 1/2 直线之上的峰充填 1/2 直线下的槽, 表明平均值是 1/2

辐照度 I : 单位时间内落在单位面积上的能量

(Irradiance)
 $I = \langle S \rangle_T = c^2 \epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle$

从而得 $I = \langle S \rangle_T = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2 = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_T = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle_T \quad [W/m^2]$

(介质中, $c \rightarrow v$ 即可).

P69 eg 3.2, 3.3

P72 左右: 关于光子

辐射能流的时间变率为光功率 P 或辐射通量, 一般以瓦特为单位。如果将照射到一个表面或从一个表面发射出的辐射通量除以表面的面积, 就得到辐射通量密度 (W/m^2)。在前一情况下我们说的是辐照度, 而后一情况下说的则是出射度 (exitance), 两种情况都是通量密度。辐照度是功率的浓度的一个量度。人的肉眼在夜空中能够看见的最弱的恒星的辐照度仅有大约 $0.6 \times 10^{-8} W/m^2$ 。

Def 平均光子通量密度: $I/h\nu$, i.e. 单位时间打到垂直光束的单位面积上的光子平均数。

Def 平均光子通量: $\Phi = AI/h\nu = P/h\nu$, i.e. 单位时间来的光子数 (P 为光功率)

P74 长度为 T 的时间区间内到达的光子数 $N = \Phi T \sim \text{Pois}$

动量与辐射压

一个电磁波射到某个实物表面上时, 它与组成大块物质的电荷相互作用。不论波是被部分吸收还是反射, 它都要对这些电荷从而对实物表面自身施加一个力。例如, 在一个良导体的情形, 电磁波的电场产生电流, 波的磁场产生力作用在这些电流上。

Ex 3.40

电磁波自身携带有动量

$S = u c$, $u = \frac{S}{c}$, $U = u \cot A = \left(\frac{S}{c} \cot A \right) c$
 电磁波能量密度, 即 $\frac{S}{c} = \text{momentum flux}$

辐射压 $P =$ 电磁波能量密度 $[N/m^2]$

$P = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \quad [J/m^3]$

能量密度 $\sim$ 压强 $\sim$ 动量流

理想吸收面上压强 $P(t) = \frac{S(t)}{c} [N/m^2]$ 以 Poynting 矢量表示
 $\langle P(t) \rangle_T = \frac{\langle S(t) \rangle_T}{c} = \frac{I}{c}$

在完全反射面上, 以 c 入射的光束将以 $-c$ 射出
 故 $\langle P(t) \rangle_T = 2 \frac{\langle S(t) \rangle_T}{c}$

Def 电磁动量体密度 $\vec{p}_v$: $\vec{p}_v = \frac{\vec{S}}{c^2}$
 (单位体积辐射的动量)

导出: $0P = P_v (c \cot A)$

$A P = \frac{0P}{\cot A} = P_v c A = A \frac{S}{c}$
 $P_v = \frac{S}{c^2} = \frac{S}{c}$

在各向同性、均匀、线性介质中: $\vec{p}_v = \frac{\vec{S}}{v^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu^2 v^2} = \epsilon \vec{E} \times \vec{B}$
 $\vec{v} = \frac{c}{n}$

对光子, $\epsilon = h\nu$, $p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}$, $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, 光子 $m=0$, $\epsilon = cp$

符合狭义相对论 $\epsilon = [(cp)^2 + (mc^2)^2]^{1/2}$

光的动量 P47
 光压 P78-79

辐射 若一个电荷非匀速运动，就会辐射。

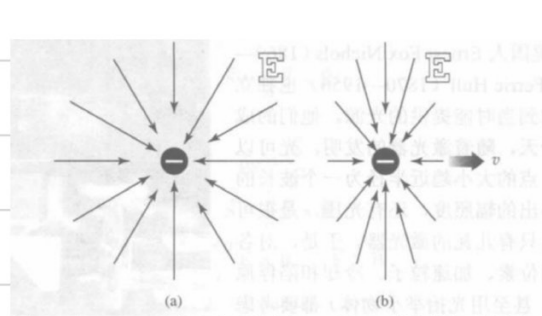


图 3.26 (a) 一个静止电子的电场, (b) 一个运动电子的电场

The electric field of a charge at rest can be represented, as in Fig. 3.26, by a uniform, radial distribution of straight field lines. For a charge moving at a constant velocity $\vec{v}$, the field lines are still radial and straight, but they are no longer uniformly distributed. The nonuniformity becomes evident at high speeds and is usually negligible when $v \ll c$.

When $v \ll c$, it's shown that

tion. For a negative charge the reverse occurs, as shown in Fig. 3.29. Observe that the irradiance is a function of θ and that $I(0) = I(180^\circ) = 0$ while $I(90^\circ) = I(270^\circ)$ is a maximum. Energy is most strongly radiated perpendicular to the acceleration causing it.

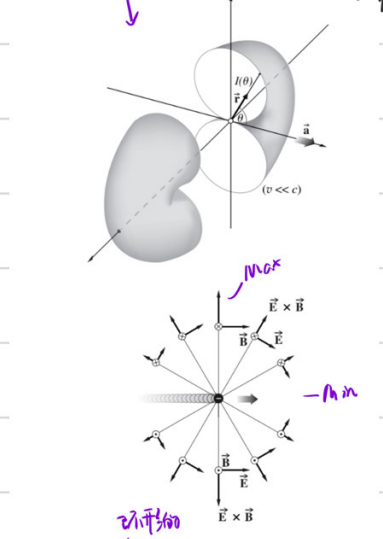
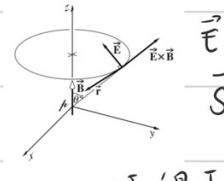


Figure 3.29 The toroidal radiation pattern of a linearly accelerating charge (split to show cross section).

电偶极辐射: 由振荡的偶极子产生。
偶极矩 $\mu(t) = \mu_0 \cos \omega t$, 仅沿一个轴。
当 $t=0$, $\mu = \mu_0 - qd$; 当两电荷分离时, $\mu=0$, 电场线解散。

法中很复杂! 远场处波E/轴处近似 $E = \frac{\mu_0 k^2 \sin \theta \cos(kr - \omega t)}{4\pi r}$
 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 是横场, 垂直, 同相。 $B = E/c$
 $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ 在波区中总沿径向向外。
由E得 $I(\omega) = \frac{\mu_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2}$ 频率越高, 辐射越强。



constant thereafter. We can anticipate that the surrounding field lines will somehow carry the information that the electron has accelerated. We have ample reason to assume that this "information" will propagate at the speed c . If, for example, $t_2 = 10^{-8}$ s, no point beyond 3 m from O would be aware of the fact that the charge had even moved. All the lines in that region would be uniform, straight, and centered on O , as if the charge were still there. At time t_2 the electron is at point O_2 moving with a constant speed v . In the vicinity of O_2 the field lines must then resemble those in Fig. 3.26b. Gauss's Law requires that the lines outside the sphere of radius $c t_2$ connect to those within the sphere of radius $c(t_2 - t_1)$, since there are no charges between them.

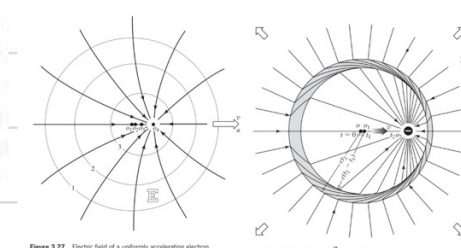


Figure 3.27 Electric field of a uniformly accelerating electron.

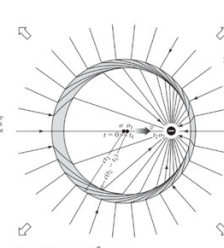


Figure 3.28 A kink in the E field lines.

It is now apparent that during the interval when the particle accelerated, the field lines became distorted and a kink appeared. The exact shape of the lines within the region of the kink is of little interest here. What is significant is that there now exists a transverse component of the electric field $\vec{E}_T$, which propagates outward as a pulse. At some point in space the transverse electric field will be a function of time, and it will therefore be accompanied by a magnetic field.
The radial component of the electric field drops off as $1/r^2$ while the transverse component drops off as $1/r$.

At large distance from the charge, the only significant field will be the $\vec{E}_T$ component of the pulse, which is known as the radiation field.

在垂直于引起辐射的加速度的方向上, 辐射的能量最强。
电荷辐射到空间的能量由某个外部动力提供, 该动力对电荷做功, 使其加速。
那, 任一条弯曲路径上行进的自由带电粒子也是做有加速度的运动, 也产生辐射咯。
p82 左右 康康理 有意思哇!

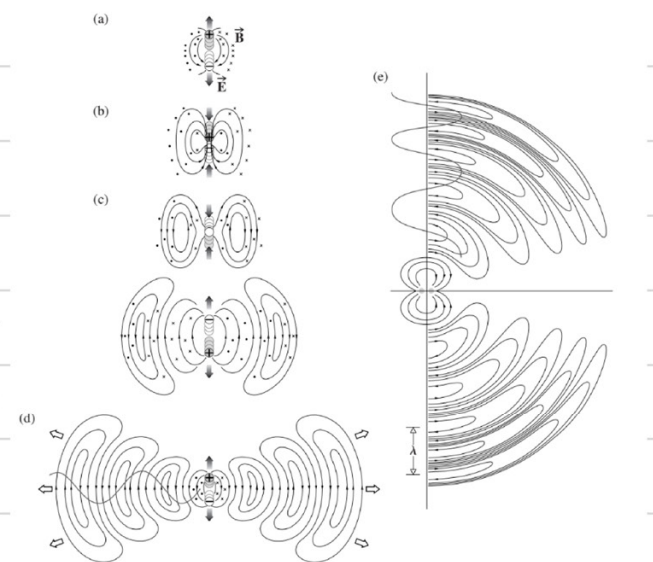


Figure 3.32 The E field of an oscillating electric dipole.

p85 光的来源: 电子在外层电荷重新排列; 颜色的成因; 光谱: 量子化; 光学致冷 (激光致冷)
共振频率: 如果原子跃迁伴随着光的发射 (如在稀有气体中), 光子的能量将精确地匹配原子的量子化的能量差。它通过 $E = h\nu$ 这个式子对应于一个特定频率。这个频率联系了光子和原子在两个特定状态之间的转变。这个频率叫做共振频率。在这样的频率上原子高效地吸收和发射能量, 每个频率有自己发生的共振程度。
光子动量: 由 $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, $E = h\nu$ 得 $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$. $\vec{p} = \hbar \vec{k}$
(光子 $m=0$)

色散：介质的折射率依赖于光的频率，只有真空是非色散的。例：P90±。再看几遍哦！

介质中的相速度： $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ， $n = \frac{c}{v}$ 的定义仅考虑了光传播过程中速度的变化，但并未考虑其他作用。而色散是一个耗散系统，耗散由内部反映。

Def 绝对折射率 n ： $n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ ， ϵ_r, μ_r 为相对电、磁导率，通常 $\mu_r \approx 1$ 。折射率 $\sim$ 电子对光的响应。

麦克斯韦关系： $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ ，但仅对几种简单介质很好成立。 ϵ_r 一般与 1.0 偏差很小。 ϵ_r 并非常数，而与入射光频率有关，且可为复数。
 n 实际依赖于频率。 n 对波长的依赖关系即“色散”。

入射波与介质的相互作用：P89±。散射；耗散性吸收 $\rightarrow$ 热能。
 原子激发寿命 $\sim 10^{-8} s$ 。一个原子每 s 最多可发射光子数 $\sim 10^8$ 。

极化 P90。
 无色透明材料的共振频率 在光谱的可见光之外。例：玻璃对紫外线不透明。

从振子模型研究色散。（尽管严格上是一个错误的模型）

原子的电子云被吸引并束缚在一个带正电的原子核上，这个吸力将电子云维持在某个平衡组态。即使对原子内部相互作用的细节所知不多，我们也可以预料，像别的稳定的、小扰动不能瓦解的力学系统一样，必须存在一个净力 F ，它使系统回归平衡。此外，我们可以合理地期望，对于离开平衡位置（这里 $F=0$ ）很小的位移 x ，这个力与 x 成线性关系。换句话说， $F(x)$ 与 x 的关系图在平衡点跨过 x 轴，在两边都很接近直线。于是对于小位移，可以假设恢复力之形式为 $F = -k_E x$ ，其中 k_E 是一个很像弹簧常数的弹性常数。一旦由于某种原因受到片刻的干扰，一个这样束缚的电子就将在其平衡位置附近以固有频率或共振频率 $\omega_0 = \sqrt{k_E / m_e}$ 振动，其中 m_e 是它的质量。这是未受外力驱动的系统的振动频率，因此 $F = -\omega_0^2 m_e x$ 。
 ω_0 是一个可观察量，用它可以摆脱弹簧模型中虚构的 k_E 。

例题 3.5 一个电磁波在一种均匀电介质中传播，频率为 $\omega = 2.10 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ ， $k = 1.10 \times 10^7 \text{ rad/cm}$ 。波的 $\vec{E}$ 场为
 $\vec{E} = (180 \text{ V/m}) \hat{j} e^{i(kx - \omega t)}$
 求：(a) $\vec{B}$ 的方向，(b) 波的速率，(c) 相联系的 $\vec{B}$ 场，(d) 折射率，(e) 电容率 (f) 波的辐照度。

ω_0 是一个可观察量。

我们将一种实物介质看作最聚集在真空中的一大群可极化的原子，它们每一个都很小（与光的波长相比），并且与其邻居紧挨着。当光波射到这样的介质上时，可以将每个原子想成一个被入射波的时变电场 $E(t)$ 驱动的经典强迫振子。假设 $E(t)$ 作用在 x 方向。图 3.38b 是各向同性介质中这样一个振子的力学表示，在这样的介质中，带负电的壳层用完全一样的弹簧与不动的带正电的原子核固结在一起。即使是在明亮的阳光的照射下，振动的振幅也不会超过大约 10^{-17} m 。一个频率为 ω 的简谐电磁波的电场作用在电荷 q_e 上的力 (F_E) 之形式为

$$F_E = q_e E(t) = q_e E_0 \cos \omega t \approx q_e E_0 e^{i\omega t} \quad (3.63)$$

注意，若驱动力在某一方向，则恢复力在相反的方向，这是它带负号的原因： $F = -k_E x = -m_e \omega_0^2 x$ 。牛顿第二定律给出运动方程，即，作用力之和等于质量乘加速度：

$$q_e E_0 \cos \omega t - m_e \omega_0^2 x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.64)$$

试探解 $x(t) = x_0 \cos \omega t$ 可得 $x(t) = \frac{q_e / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t)$

电极化强度 $\vec{P} \equiv \sum \vec{p}_i = q_e x N$ [C/m] 电极化强度是有介质时与没有介质时的电场之间的差异的量度。
 (保持电场度)。

$$P = \frac{q_e^2 N E / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad n \sim \epsilon_r \sim P \sim \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow \text{由 } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ 得 } \epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} = \epsilon_0 + \frac{q_e^2 N / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{利用 } n \approx \sqrt{\epsilon_r} \text{, 得 } n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

等价地， $(n^2 - 1)^{-1} = -C \lambda^2 + C \lambda_0^2$ ， $C = \frac{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e}{N q_e^2}$

系统有多个共振频率。对折射 $\sim$ 不同频率共振不同

通常，随着照明光频率的增高，任何一种物质的折射率会发生几次从 $n > 1$ 到 $n < 1$ 的转变。其含义为：系统不仅仅在一个频率 ω_0 上共振，而是显然有几个这样的频率。看来下面的推广做法是合理的：假设单位体积中有 N 个分子，每个分子有 f_j 个振子，其固有频率为 ω_{0j} ，这里 $j = 1, 2, 3 \dots$ 。这时，

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad \text{有阻尼} \quad n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i \gamma_j \omega}$$

这个结果实质上与量子力学处理给出的结果相同，除了必须对某些项重新解释。因此， ω_{0j} 这些量就是特征频率，原子将在这些频率上吸收和发射辐射能。 f_j 项是权重因子，满足要求 $\sum_j f_j = 1$ ，叫做振子强度。它们反映了对于每种振动模式应予重视的程度。由于它们量度了给定的一种原子跃迁发生的或然率， f_j 也叫跃迁概率。

阻尼来源：受迫振子再辐射时损失能量；

原子、分子间相互作用引起的“摩擦”。

这是带负电的电子云与带正电的原子核之间的相对位移。传统做法是令 q_e 为正，讨论振子的位移。若没有驱动力（没有入射波），振子将以它的共振频率 ω_0 振动。有外电场时，若场的频率小于 ω_0 ， $E(t)$ 和 $x(t)$ 的符号相同，这意味着电荷能够跟随外力振动（即它们同相）。但是，当 $\omega > \omega_0$ ，位移 $x(t)$ 与该时刻的力 $q_e E(t)$ 的方向相反，所以与外力相位差 180° 。记住我们是在讨论 $\omega > \omega_0$ 时的振动的偶极子，正电荷的相对运动是在外场方向上的振动。频率高于共振频率时，正电荷与外场相位差 180° ，我们说偶极子落后 π 弧度（见图 4.9）。

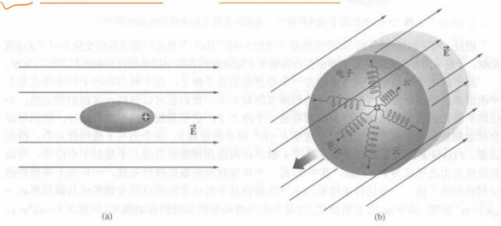


图 3.38 (a) 在外加 $\vec{E}$ 场作用下电子云的变形。(b) 各向同性介质中的机械振子模型——切弹簧都相同，并且振子可以在一切方向上同样地振动

在比共振频率高得越来越多的频率上， $(\omega_0^2 - \omega^2) < 0$ ，并且振子的位移与驱动力将有一个约 180° 的相位差。因此，产生的电极化也将与外加电场相反。于是介电常数因而还有折射率二者都会小于 1。在越来越低于共振频率的频率上， $(\omega_0^2 - \omega^2) > 0$ ，电极化将与外电场近于同相。这时介电常量和相应的折射率将大于 1。这种行为实际上仅仅是发生的事情的一部分，但通常在所有各种材料中都观察到。

通常折射率 < 1 的解释。

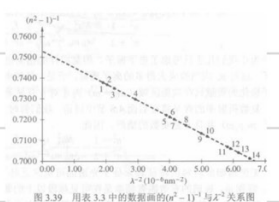


图 3.39 用表 3.3 中的数据画出的 $(n^2 - 1)^{-1}$ 与 λ^2 关系图

表 3.3 冕牌玻璃的色散

谱线	波长 (nm)	折射率 n
1	728.135	1.5346
2	706.519	1.5352
3	667.815	1.53629
4	587.562	1.53955
5	507.587	1.54417
6	504.774	1.54417
7	501.567	1.54473
8	492.193	1.54528
9	447.148	1.54943
10	438.793	1.55026
11	414.376	1.55374
12	412.086	1.55402
13	402.619	1.55530
14	388.905	1.55747

* 波长是氢弧光谱发射谱线的波长，对应的折射率是算出的。

虽然这个式子对气体这样的稀薄介质很好地成立，但要把它用于稠密物质则必须克服另一个麻烦。每个原子同它本地的电场相互作用，但是，不像前面考虑的孤立原子那样，稠密物质中的原子还将受到它的同伴产生的感生场的作用。因此，一个原子除了外场 $E(t)$ 之外还“看到”另一个场^①，即 $P(t)/3\epsilon_0$ 。可以证明（但这里不给出细节）

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad n^2 - 1 = \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i \gamma_j \omega} \quad \text{非-1略} \quad (3.73)$$

迄今为止我们几乎只考虑了电子振子，但是同样的结果也适用于束缚在固定的原子座点上的离子。这时 m_e 应当换成大得多的离子质量。于是，虽然电子极化在整个光学频段都重要，但离子极化的贡献只在共振区域 ($\omega_{0j} = \omega$) 内才对 n 有显著影响。

复数折射率的含义将在后面 4.8 节中讨论。我们暂时主要限于讨论吸收可以忽略（即 $\omega_{0j}^2 - \omega^2 \gg \gamma_j \omega$ ）并且 n 是实数的情形，因此

$$n^2 - 1 = \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (3.74)$$

当 $\omega_{0j}^2 - \omega^2 \gg \gamma_j \omega$ 时。

考虑阻尼和阻尼: $q_e(E_0 + \frac{P}{3\epsilon_0}) - \gamma m_e \dot{x} - m_e \omega_0^2 x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2}$

设 $\tilde{E}_0(t) = E_0 e^{i\omega t}$, 代入试探解 $\tilde{x} = x_0 e^{i\omega t}$, 又 $P = N q_e x = N q_e x_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow q_e (E_0 e^{i\omega t} + \frac{N q_e x_0 m_e}{3\epsilon_0} e^{i\omega t}) - i\gamma \omega x_0 e^{i\omega t} - m_e \omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} = -m_e \omega^2 x_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow q_e E_0 = \left[-\frac{N q_e^2}{3\epsilon_0} + m_e (i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2) \right] x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{q_e E(t) / m_e}{i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e}}$$

$$\text{又 } P = x_0 \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = (n^2 - 1) \epsilon_0 E = q_e x N = \frac{q_e^2 E(t) N / m_e}{i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e}}$$

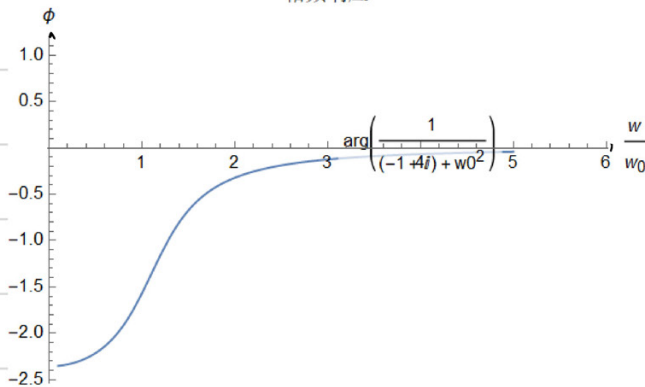
$$\Rightarrow \frac{1}{(n^2 - 1) \epsilon_0} = \frac{i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2}{q_e^2 N / m_e} - \frac{1}{3\epsilon_0} \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{(n^2 - 1) \epsilon_0} = \frac{m_e}{q_e^2 N} (i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \frac{1}{i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2} \xrightarrow{\text{分子分母同乘}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N q_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \frac{1}{i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2}$$

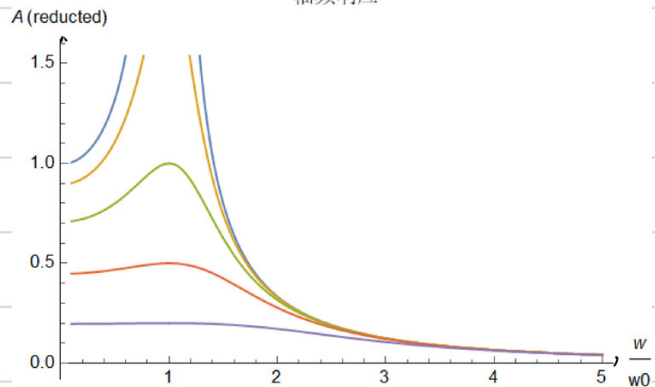
另外, 探究一下微分方程 $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 e^{i\omega t}$ 的性质 (稳态响应)

还是从阻尼开始: 代入试探解 $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$, 解得 $x_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{2i\gamma \omega + \omega_0^2 - \omega^2}$

相频响应

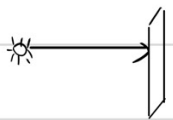


幅频响应



3.41* A surface is placed perpendicular to a beam of light of constant irradiance (I). Suppose that the fraction of the irradiance absorbed by the surface is α . Show that the pressure on the surface is given by

$$P = (2 - \alpha)I/c$$



Completely absorbed: $P_1 = \frac{I}{c}$

Completely reflected: $P_2 = 2\frac{I}{c}$

$$\therefore \alpha \text{ absorbed: } P_\alpha = P_2(1-\alpha) + P_1\alpha = (2-\alpha)I/c$$

3.65* Crystal quartz has refractive indexes of 1.557 and 1.547 at wavelengths of 400.0 nm and 500.0 nm, respectively. Using only the first two terms in Cauchy's equation, calculate C_1 and C_2 and determine the index of refraction of quartz at 610.0 nm.

From Cauchy Equation $n(\lambda) = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2}$ (first 2 terms)

$$\begin{cases} 1.557 = C_1 + \frac{C_2}{400^2} \\ 1.547 = C_1 + \frac{C_2}{500^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1.5292 \\ C_2 = \frac{1}{9} \times 10^6 \text{ nm}^2 \end{cases}$$

$$\therefore n(610) = 1.541$$

3.56 The low-frequency relative permittivity of water varies from 88.00 at 0°C to 55.33 at 100°C. Explain this behavior. Over the same range in temperature, the index of refraction ($\lambda = 589.3 \text{ nm}$) goes from roughly 1.33 to 1.32. Why is the change in n so much smaller than the corresponding change in K_E ?

水温变化, 微观上表现为分子热运动的动能变化
温度升高导致无规则运动加剧, 使电子/离子定向运动更加困难, 致使相对电容率下降。

n 与 K_E 变化的不一致主要因为测量的频率不同。由色散理论: $n = n(\lambda)$

$K_E = K_E(\lambda)$: K_E 的测量是在低频段, 而 n 的测量在可见光频段。

因此 n 与 K_E 变化的不一致是自然的。

$n_2(\lambda)$ 在低频与高频波段下测量结果差异解释如下:

在 0~100°C 下, 水处于液态; 水分子是极性分子, 在低频外场下水的极化响应主要为水分子的转动, 而在高频外场下, 转动惯量大, 故响应微小。此时主要响应为电子云的振荡。两个频段下响应的机制不同。

→ 无色透明的原因

无色透明的材料的特征频率处于光谱的可见区之外（事实上这就是它们无色透明的原因）。特别是，玻璃的有效固有频率是在可见频段以上的紫外区，因此玻璃对紫外线是不透明的。在 $\omega_0 \gg \omega$ 的情况下，(3.74) 式中的 ω 项相比之下可以略去；结果在这一频段内的折射率实际上是常数。例如，玻璃的重要的特征频率出现在大约为 100 nm 的波长上。光谱可见区的中心波长大约是它的 5 倍，因而 $\omega_0 \gg \omega$ 。注意当 ω 向着 ω_0 增大时， $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 减小而 n 随频率逐渐增大，这在图 3.40 中可以清楚看到。这叫正常色散。在紫外区，随着 ω 趋近一个固有频率，原子开始共振。它们的振幅将显著增大，并伴有阻尼现象和对入射波能量的强烈吸收。在 (3.73) 式中当 $\omega_0 = \omega$ 时，阻尼项显然成了最重要的项。图 3.41 中紧邻各个 ω_0 的区域叫做吸收带。那里的 $dn/d\omega$ 是负的，我们把这个过程叫做反常色散。如果让白光通过一块玻璃棱镜，其成分中蓝光的折射率比红光的大，因此，蓝光的偏向角将更大一些（见 5.5.1 节）。反之，如果我们用一个液胞棱镜，其中装着染料溶液，其吸收带在可见区内，那么光谱将有显著的变化（见习题 3.59）。一切物质在电磁波频谱内某处都有吸收带，因此从 19 世纪初沿用下来的反常色散这一术语，肯定是一个错误的名称。

↑ 正常色散、反常色散的来由。

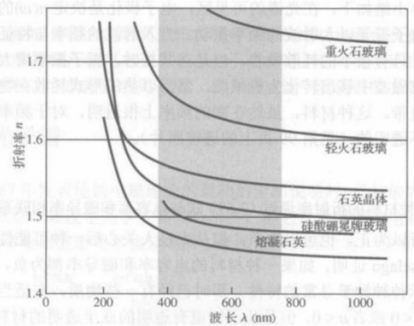


图 3.40 各种材料的折射率对波长的依赖关系。注意当 λ 向右方增大时， n 向左方增大。

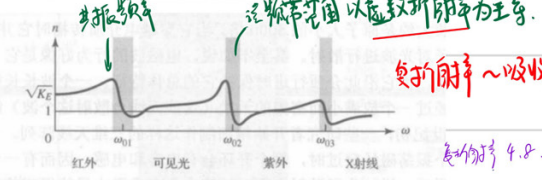


图 3.41 折射率-频率关系

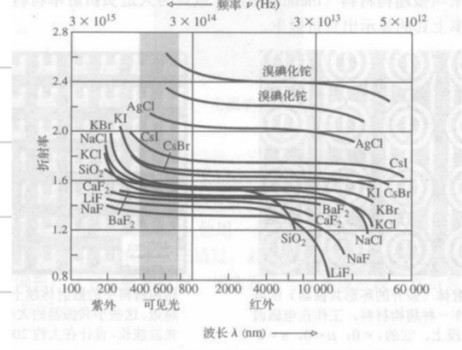


图 3.42 几种重要光学晶体的折射率与波长和频率的关系

上面的部分内容小结如下：在光谱的可见区，电子极化是决定 $n(\omega)$ 的主要机制。按照经典观点，我们想象电子振子以入射波的频率振动。当入射波的频率与特征频率或固有频率差很多时，振动很小，只有很小的耗散吸收。但是在共振时，振子振幅增大，场对电荷做的功也增大。电磁能从电磁波中移出转化为机械能，然后以热的形式耗散在物质中，这时我们说有一个吸收峰或吸收带。这种材料，虽然在别的频率上很透明，对于频率为其特征频率的入射辐射，则是相当不透明的（见第 99 页上的透镜照片）。

例题 3.5 一个电磁波在一种均匀电介质中传播，频率为 $\omega = 2.10 \times 10^{15}$ rad/s, $k = 1.10 \times 10^7$ rad/cm。波的 $\vec{E}$ 场为

$$\vec{E} = (180 \text{ V/m}) \hat{j} e^{i(kx - \omega t)}$$

求：(a) $\vec{B}$ 的方向，(b) 波的速率，(c) 相联系的 $\vec{B}$ 场，(d) 折射率，(e) 电容率 (f) 波的辐照度。

- (a) $\vec{B} \perp \vec{E}$ ，故 $\vec{B}$ 方向为 $\hat{i}$ 或 $\hat{k}$ 方向。假设沿 $\hat{k}$ 方向。
 (b) $v = \frac{\omega}{k} = \dots$ (c) $\vec{B} = \frac{E}{v} \hat{k} = \dots$
 (d) $n = \frac{c}{v} = \dots$ (e) $K_m = 1$, $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 已求得， $\epsilon = K \epsilon_0$ 。
 (f) $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \dots$

Ex 3.40 到达地球大气顶层（离太阳 1.5×10^{11} m）的太阳光的坡印廷矢量的平均大小大约是 1.4 kW/m^2 。求：
 (a) 作用在面向太阳的金属反射板上的辐射压强。
 (b) 太阳直径为 1.4×10^9 m，求太阳表面上辐射压强的近似值。

利用太阳光压驱动飞船？

(a) $\mathcal{P} = 2u = 2 \frac{S}{c} = 9.3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$
 (b) 太阳表面附近： $r^2 S_0 = R^2 S \rightarrow S_0 = \frac{R^2}{r^2} S$
 $\Rightarrow \mathcal{P}_0 = \frac{R^2}{r^2} \mathcal{P} = 0.107 \text{ N/m}^2$

Ex 3.62 3.62* 证明 (3.70) 式可以改写为
 $(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$
 式中数学式 $C = 4\pi^2 e^2 m_e / N q_e^2$ 。
 (3.70) $n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$
 $\rightarrow (n^2 - 1)^{-1} = \frac{\epsilon_0 m_e}{N q_e^2} (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}}{\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) 0$

3.63 柯西 (A. L. Cauchy, 1789—1857) 对于对可见光透明的物质，求出了一个关于 $n(\lambda)$ 的经验方程。他的表示式相当于幂级数展开：
 $n = C_1 + C_2/\lambda^2 + C_3/\lambda^4 + \dots$
 其中各个 C 都是常量。参看图 3.41, C_1 的物理意义是什么？
 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $n \rightarrow C_1$

$p. 62$

虚数部分的折射率的物理意义：

考虑一平面波 $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ ，介质折射率 $n = n_r + i n_i$

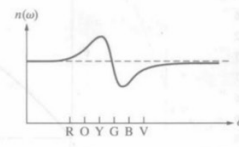
由 $n = \frac{c}{v} = \frac{kc}{\omega}$ ，则 $\frac{k}{\omega} = \frac{n}{c}$ 。k 看作复数，虚部表示振幅随传播衰减

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t)} = E_0 e^{i n_r \frac{\omega}{c} x - t} e^{-n_i \frac{\omega}{c} x}$$

$$I = E_0^2 e^{-2 n_i \frac{\omega}{c} x} = I_0 e^{-\alpha x} = I_0 e^{-\frac{4\pi n_i}{\lambda} x}$$

3.59 品红是一种强（苯胺）染料，它在乙醇溶液中呈深红色，呈深红色是由于它吸收频谱的绿色成分。（可以预料，品红晶体表面相当强烈地反射绿光）。想象有一个薄壁的空心棱镜，里面装满了这种溶液。对于白光入射，光谱将会是怎样的？附带说一下，反常色散是塔耳博特 (F. Talbot) 在 1840 年前后首先观察到的，并在 1862 年由 Le Roux 命名。他的工作很快被人们忘掉了，八年后又被 C. Christiansen 重新发现。

3.59 玻璃棱镜展开的光谱的正常顺序是红、橙、黄、绿、蓝、紫，红光偏折最小，紫光偏折最大。对一块品红棱镜，它在绿光频段中有一个吸收带，因此绿光两侧的黄光和蓝光的折射率 (n_y 和 n_b) 取极值，如图 3.26 中所示；即 n_b 是极大， n_y 是极小，并且 $n_b > n_y > n_o > n_r > n_v$ 。于是光谱按照偏折增大的顺序是蓝、紫、暗吸收带、红、橙、黄。



The Propagation of Light

• Ex 4.1 (见底) 由偶极辐射得

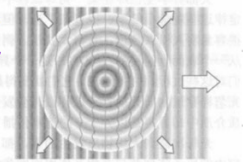


图 4.2 一个从左射入的平面波扫过原子，散射出球面波。过程持续着，每秒有亿万光子从散射原子流向一切方向

• Rayleigh Scattering P112

P112

散射光的强度 $\propto \frac{1}{\lambda^4} / \propto \nu^4$

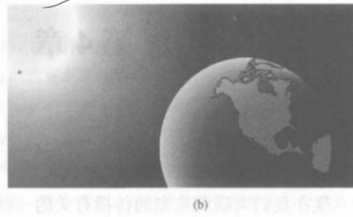
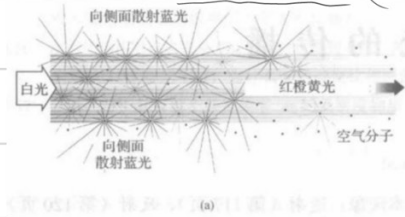


图 4.1 (a) 太阳光横穿一个空气分子很稀疏的区域。横向散射的光主要是蓝光，这是天空为蓝色的原因。未散射的光中富含红光，只有当日出和日落太阳在天空中很低时才能看到。(b) 由于大气散射，太阳光线的来到将超越昼夜明暗界线大约 18° 。在这个曙暮光时段内，天上的光逐渐变暗到夜晚的全黑

发生在 $\lambda < \frac{c}{20}$ 的粒子上的散射为瑞利散射。

• 光穿行的物质越稠密，侧向散射越少。

稀薄大气中，... P113

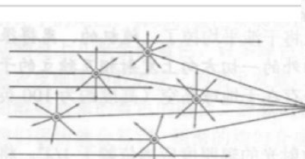
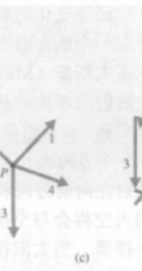
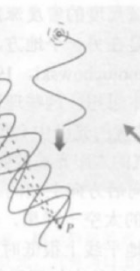
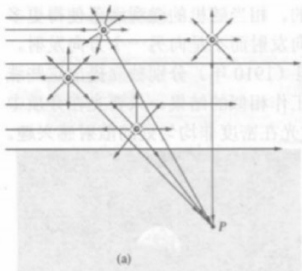


图 4.4 考虑一个从左方进入的平面波。光被多多少少散射到前进方向

图 4.3 考虑一个从左方入射的平面波。(a) 光被一些分布离得很远的分子散射。(b) 到达侧面一点 P 的子波有一堆乱七八糟的不同相位，它们不至于发生持续的相长干涉。(c) 也许用相矢量来解释最容易理解。在它们到达 P 点时，相矢量相互之间有很大的相角差。因此当把它们一个接一个加起来之后，它们倾向于螺旋转圈，保持总的相矢量很小。记住，我们实际上对付的是成千上万个相小矢量，而非 4 个相当大的相矢量

interference. Random, widely spaced scatterers driven by an incident primary wave emit wavelets that are essentially independent of one another in all directions except forward. Laterally scattered light, unimpeded by interference, streams out of the beam. This is approximately the situation

Forward Propagation:

All the scattered wavelets add constructively with each other in forward

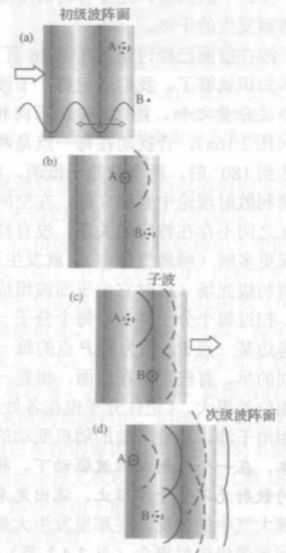


图 4.5 在前进方向上，散射子波同相到达平面波阵面上，谷与谷相加，峰与峰相加

• 介质越稠密，均匀的，越有序，侧向相消干涉越剧烈，非前进方向的散射越少 P116

• Transmission & the Index of Refraction (折射率) P117.

透射。折射率 ~ 相位变化。

The transmission of light through a homogeneous medium is an ongoing repetitive process of scattering and rescattering. Each such event introduces a phase shift into the light field, which ultimately shows up as a shift in the apparent phase velocity of the transmitted beam from its nominal value of c . That corresponds to an index of refraction for the medium ($n = c/v$) that is other than one, even though photons exist only at a speed c .

① To see how this comes about, return to Fig. 4.5. Recall that the scattered wavelets all combine in-phase in the forward direction to form what might best be called the secondary wave. For empirical reasons alone we can anticipate that the secondary wave will combine with what is left of the primary wave to yield the only observed disturbance within the medium, namely, the transmitted wave. Both the primary and secondary electromagnetic waves propagate through the interatomic void with the speed c . Yet the medium can certainly possess an index of refraction other than 1. The refracted wave may appear to have a phase velocity less than, equal to, or even greater than c . The key to this apparent contradiction resides in the phase relationship between the secondary and primary waves.

The classical model predicts that the electron-oscillators will be able to vibrate almost completely in-phase with the driving force (i.e., the primary disturbance) only at relatively low frequencies. As the frequency of the electromagnetic field increases, the oscillators will fall behind, lagging in phase by a proportionately larger amount. A detailed analysis reveals that at resonance the phase lag will reach 90° , increasing thereafter to almost 180° , or half a wavelength, at frequencies well above ω_0 the particular characteristic value. Problem 4.4 explores this phase lag for a damped driven oscillator, and Fig. 4.9 summarizes the results.

② In addition to these lags there is another effect that must be considered. When the scattered wavelets recombine, the resultant secondary wave (itself lags the oscillators by 90°).

见 Ex 4.5

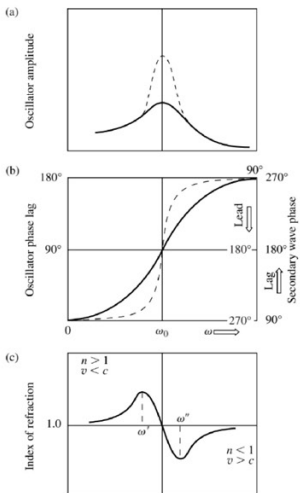


Figure 4.9 A schematic representation of (a) amplitude and (b) phase lag versus driving frequency for a damped oscillator. The dashed curves correspond to decreased damping. The corresponding index of refraction is shown in (c).

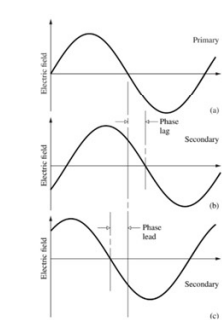


Figure 4.10 A primary wave (a) and two possible secondary waves. In (b) the secondary lags the primary—it takes longer to reach any given value. In (c) the secondary wave reaches any given value before (at an earlier time than) the primary; that is, it leads.

Result: ① ② 合效果

The combined effect of both these mechanisms is that at frequencies below resonance, the secondary wave lags the primary (Fig. 4.10) by some amount between approximately 90° and 180° , and at frequencies above resonance, the lag ranges from about 180° to 270° . But a phase lag of $\delta \approx 180^\circ$ is equivalent to a phase lead of $360^\circ - \delta$, [e.g., $\cos(\theta - 270^\circ) = \cos(\theta + 90^\circ)$]. This much can be seen on the right side of Fig. 4.9b.

这两种机制的联合效应是，在低于共振的频率上，次级波落后于初级波（图 4.10）的相位大约在 90° 与 180° 之间，而在高于共振的频率上，落后从大约 180° 到 270° 。但是，相位落后 $\delta \approx 180^\circ$ 等价于相位领先 $360^\circ - \delta$ [如 $\cos(\theta - 270^\circ) = \cos(\theta + 90^\circ)$]，这些可以在图 4.9b 的右边看到。

在透明介质内，初级波和次级波重叠在一起，产生一个净透射波动，由二者的振幅和相对相位决定。初级波除了被散射减弱之外，它在介质中的传播速度如同它在自由空间中的传播一样，与自动整个过程的这一自由空间波相比，这个合成波发生了相移，并且这个相位差很关键。

当次级波落后（或领先）于初级波时，合成的透射波必定也落后（或领先）于初级波一个相位（图 4.11）。这个定性关系暂时对我们的目的是有用的，虽然应当注意到，合成波的相位也依赖于相互作用的波的振幅 [见 (7.10) 式]。在低于 ω_0 的频率上，透射波落后于自由空间波，而在高于 ω_0 的频率上，透射波领先于自由空间波。对于 $\omega = \omega_0$ 的特殊情况，次级波超前初级波 180° ，前者抵消后者，因此射波的振幅有明显的减小，虽然其相位不受影响。

随着透射波穿越介质前进，将一再发生散射。穿越介质的光的相位逐步推迟（或超前）。显然，由于速度是不变的相前速度，相位的改变就相当速度的改变。

现在我们想要证明，相移的确等于相速度的差异。自由空间里，在某个 P 点上合成波可以写为

$$E_0(t) = E_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

若 P 点周围是介质，那么就会有一个累积相移 ϕ_p ，它是在波穿越介质到达 P 点的过程中建立起来的。在通常的辐照度水平下，介质的行为是线性的，是介质中的频率和真空中的频率一样，即使波长和波速可能不同。这时，在介质中，P 点的扰动为

$$E_0(t) = E_0 \cos(\omega t - \phi_p) \quad (4.2)$$

其中 ϕ_p 相当于一个相位滞后。一个处于介质中的在 P 点的观察者，将不得不比他处于真空中时等候更长的时间，以待给定的波峰到达，即，如果你想象两个平行的等频率波，一个在真空中，另一个在介质中，真空中的波将比另一个波（我时 ϕ_p / ω ）经过 P 点。于是很清楚，相位滞后 ϕ_p 对应于波速减小 $v < c$ ，即 $n > 1$ 。类似地，相位超前导致波速增大， $v > c$ ， $n < 1$ 。我们再次看到，散射过程是一个连续不断的过程，随着光在介质中的穿过，建立了累积的相移。这就是说， n 是光穿越的介质的长度的函数，若是 v 恒定的话它必定如此（见习题 4.5）。在光学中遇到的绝大多数情形中， $v < c$ 及 $n > 1$ ，见表 4.1。重要的例外是 X 射线的传播情形，这时 $\omega > \omega_0$ ， $v > c$ 及 $n < 1$ 。

4.4 证明 $m_e \ddot{x} + m_e \gamma \dot{x} + m_e \omega_p^2 x = q_e E e^{i\omega t}$

(a) 说明每一项的意义。
 (b) 令 $E = E_0 e^{i\omega t}$ 和 $x = x_0 e^{i\omega t}$ ，其中 E_0 和 x_0 是实数量，代入上式，证明

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

 (c) 推导相位滞后 α 的表达式，并讨论 $\omega \ll \omega_0$ 到 $\omega > \omega_0$ ， α 如何随 ω 变化。
 (d) $m_e \ddot{x}$ 是电场力， $m_e \gamma \dot{x}$ 是阻尼力， $m_e \omega_p^2 x$ 是恢复力。
 (i) $i\omega \dot{x} = m_e x_0 (-i\omega) e^{i(\omega t - \alpha)} + m_e \gamma x_0 (i\omega) e^{i(\omega t - \alpha)} + m_e \omega_p^2 x_0 e^{i(\omega t - \alpha)}$
 $\Rightarrow x_0 m_e (-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_p^2) = E_0 e^{i\alpha}$
 (ii) 两边取模 $x_0 = \frac{E_0}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$
 (c) $e^{i\alpha} = \frac{x_0 \omega_0^2}{E_0} (1 - \omega^2/\omega_0^2 + i\gamma\omega/\omega_0^2)$
 $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$
 $\sin \alpha = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$
 $\therefore \alpha = \arctan \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \arctan \left(\frac{\gamma}{\omega_0^2/\omega - \omega} \right)$
 $\omega \ll \omega_0 \rightarrow \alpha \approx 0$
 $\omega > \omega_0 \rightarrow \alpha \approx \pi$

4.1 通过一个量纲分析论证，建立瑞利散射中被散射光的强度与 λ^{-4} 的依赖关系。令 E_{in} 和 E_{sc} 是入射振幅和散射振幅，假设 $E_{sc} \propto E_{in}$ 及 $E_{sc} \propto 1/r$ ，并且看来有理由假定，散射振幅与散射体的体积 V 成正比，这在一定限制下是合理的。定出比例常量的单位。
 设散射振幅 $E_{sc} \propto \frac{V}{r}$
 $E_{sc} = K \frac{V}{r} E_{in}$
 $[L] [L^3] [L^{-1}] [L]$
 $\therefore K$ 单位为 $[L]^2$ ，又有 λ 来考虑。
 $\therefore K = C \lambda^{-2}$ ， C 为无量纲常数。
 $\therefore \frac{I_s}{I_i} \propto K^2 \propto \lambda^{-4}$

4.5 想象我们有一块无吸收的玻璃板，厚度为 Δy ，折射率为 n ，位于光源 S 和观察者 P 之间。
 (a) 若无玻璃板出现，不受阻碍的波为 $E_0 = E_0 \exp(i\omega t - y/c)$ ，证明有玻璃板时观察看到的波是

$$E_p = E_0 \exp[i\omega(t - (n-1)\Delta y/c - y/c)]$$

 (b) 证明若 $n=1$ 或 Δy 很小，有

$$E_p = E_0 + \frac{i\omega \Delta y}{c} E_0 e^{-i\omega y/c}$$

 可以将右边第二项看成玻璃板中的原子产生的场。
 (i) $n = \frac{c}{v}$ 若 $v = \frac{c}{n}$
 通过玻璃板的时间为 $\Delta t = \frac{\Delta y}{v} - \frac{\Delta y}{c} = \Delta y \left(\frac{n-1}{c} \right)$
 $\therefore E_p = E_0 \exp[i\omega(t - (n-1)\Delta y/c - y/c)]$
 (ii) 若 $n=1$ 或 Δy 很小，则 $\Delta t \rightarrow 0$ 。
 $E_p = E_0 e^{-i\omega(n-1)\Delta y/c}$
 Taylor 展开： $e^{-i\omega(n-1)\Delta y/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta y/c + O((i\omega\Delta y)^2)$
 $= 1 + \frac{i\omega(n-1)\Delta y}{c} e^{-i\omega y/c} (-i) e^{-i\omega y/c}$
 $\therefore E_p = E_0 + \frac{i\omega(n-1)\Delta y}{c} E_0 e^{-i\omega y/c}$

小颗粒：瑞利散射
 大颗粒：米氏散射

散射会造成偏振 P436, P437. 反射也会引起偏振 (偏振角)

反射与折射界限 - 一种散射。

反射 P132

费马原理 P134 + 例题 P137

反射

If the transition between two media is gradual—that is, if the dielectric constant (or the index of refraction) changes from that of one medium to that of the other over a distance of a wavelength or more—there will be very little reflection; the interface effectively vanishes. On the other hand, a transition from one medium to the other over a distance of 1/4 wavelength or less behaves very much like a totally discontinuous change.

原则上每个分子都对反射没有贡献，但实际上，不成对的原子振子才引起反射的有效原因。(米氏散射)

Experience with the common mirror makes it obvious that white light is reflected as white—it certainly isn't blue. To see why, first remember that the layer of scatterers responsible for the reflection is effectively about $\lambda/2$ thick (per Fig. 4.6). Thus the larger the wavelength, the deeper the region contributing (typically upward of a thousand atom layers), and the more scatterers there are acting together. This tends to balance out the fact that each scatterer is less efficient as λ increases (remember $1/\lambda^4$). The combined result is that the surface of a transparent medium reflects all wavelengths about equally and doesn't appear colored in any way. That, as we will see, is why this page looks white under white-light illumination.

散射光强度 $\propto \lambda^{-4}$

色散补充：Helmholtz Dispersion Eqn.

Sellmeier Dispersion Eqn.

波的叠加

ps: 要做成, 先要想到. 降着大家走.

• 太阳光电场振幅 (即地球的) $\approx 10 \text{ V/cm}$

• 多个同频相干简谐波的叠加:
$$\begin{cases} E = \sum_{i=1}^N E_{0i} \cos(\alpha_i \pm \omega t) \\ E^2 = \sum_{i=1}^N E_{0i}^2 + 2 \sum_{i>j}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \end{cases}$$
 $\rightarrow \alpha_i$ 为相位中的空间部分. (辐照度).

对于两个扰动叠加, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n(r_1 - r_2)$ 为相位差, $n(r_1 - r_2)$ 为光程差.

• 复数方法: 以两个同频简谐波的叠加为例.

有 $\tilde{E}_j = E_{0j} e^{i(\alpha_j \pm \omega t)}$ 其中 $\alpha_j = E_j - kx_j$

$$\therefore \tilde{E} = \left[\sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \right] e^{i\omega t}$$

则 $E_0 e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j}$ 为复振幅, $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\text{Re}(\sum E_{0j} e^{i\alpha_j})}{\text{Im}(\sum E_{0j} e^{i\alpha_j})} = \frac{\sum E_{0j} \cos \alpha_j}{\sum E_{0j} \sin \alpha_j}$

$$\Rightarrow E^2 = \tilde{E}_0^* \tilde{E}_0 = \left(\sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \right) \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} e^{-i\alpha_i} \right) = \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 + \sum_{i>j}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j} [e^{i(\alpha_i - \alpha_j)} + e^{-i(\alpha_i - \alpha_j)}]$$

$$= \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 + 2 \sum_{i>j}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j} \cos(\alpha_i - \alpha_j)$$

• 相矢量方法: 相矢量常记为 $E_0 \angle \alpha$ 形式 (phasor)

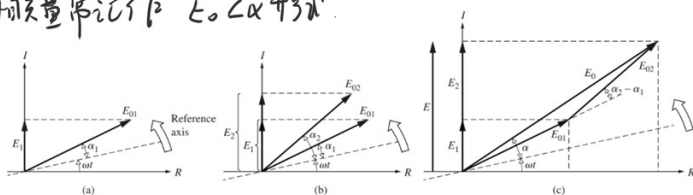


Figure 7.6 Phasor addition.

$$\Rightarrow E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

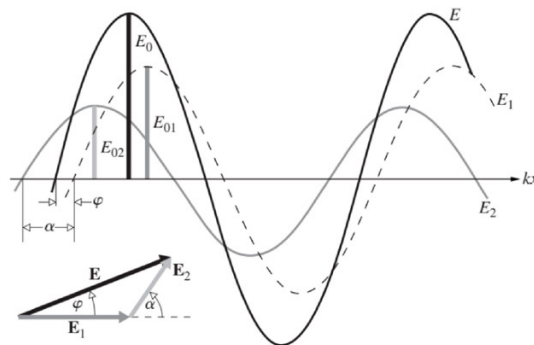


Figure 7.8 The summation of two sinusoidal functions of the same frequency using phasor addition. Here E_1 is taken as the reference phasor, and since E_2 leads E_1 (i.e., its peak occurs at an earlier location) the angle α is positive. Thus φ is positive and the resultant E also leads E_1 .

• Standing waves

General sol. of 1D wave Eqn ($\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$) is: $\psi(x,t) = C_1 f(x-vt) + C_2 g(x+vt)$

But, let's see another case excluded. 考虑两同频率反向传播的情况.

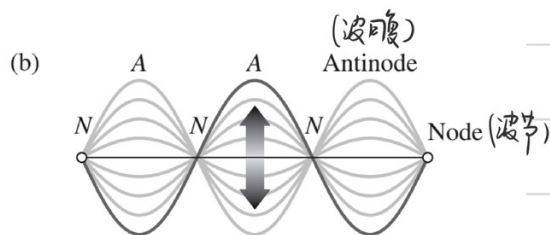
$$\begin{cases} E_l = E_{0l} \sin(kx + \omega t) \\ E_r = E_{0r} \sin(kx - \omega t + \epsilon_r) \end{cases}$$

BC: $E|_{x=0} = (E_l + E_r)|_{x=0} = 0$

$$\Rightarrow \text{sol: } \epsilon_r = 0, E = E_0 [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)]$$

$$\therefore E(x,t) = 2E_0 \sin kx \cos \omega t \leftarrow \text{Standing wave Eqn.}$$

p362-364 驻波的故事.



不同频率的叠加

考虑不同频率, 同向传播, 等强度的两简谐波

波动用指数 $\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ E_2 = E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases}$ 设 $k_1 > k_2, \omega_1 > \omega_2$ 两波在 $t=0$ 时均为 0

则 $E = E_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$
 $= 2E_0 \cos \frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}$

Def 平均角频率 $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 调制角频率 $\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$
 平均波数 $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ 调制波数 $k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}$

于是 $E = 2E_0 \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

高频项: 外电路

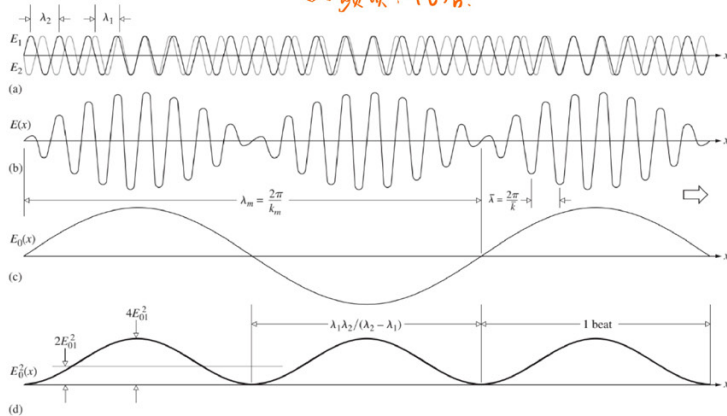


Figure 7.16 The superposition of two equal-amplitude harmonic waves of different frequency producing a beat pattern.

The total disturbance may be regarded as a traveling wave of frequency $\bar{\omega}$, known as the carrier, having a time-varying or modulated amplitude $E_0(x, t)$ such that

$$E(x, t) = E_0(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (7.34)$$

where

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (7.35)$$

Accordingly, $\bar{k}$ and $\bar{\omega}$ are often referred to as the spatial and temporal carrier frequencies. In applications of interest here, ω_1 and ω_2 will always be rather large. In addition, if they are comparable to each other, $\omega_1 \approx \omega_2$, then $\bar{\omega} \gg \omega_m$ and $E_0(x, t)$ will change slowly, whereas $E(x, t)$ will vary quite rapidly (Fig. 7.16). The irradiance is proportional to

$$E_0^2(x, t) = 4E_{01}^2 \cos^2(k_m x - \omega_m t)$$

or $E_0^2(x, t) = 2E_{01}^2 [1 + \cos(2k_m x - 2\omega_m t)]$

详见 P368±

Group velocity

波包不是真正携带能量的

The specific relationship between ω and k determines v , the phase velocity of a wave. In a nondispersive medium, and vacuum is the only truly nondispersive environment, $v = \omega/k$ [Eq. (2.33)], and a plot of ω versus k is a straight line. The frequency and wavelength change so as to keep v constant. All waves of a particular type (e.g., all EM waves) travel with the same phase speed in a nondispersive medium. By contrast, in a dispersive medium (anything other than vacuum) every electromagnetic wave propagates at a speed that depends on its frequency.

When a number of different-frequency harmonic waves superimpose to form a composite disturbance, the resulting modulation envelope will travel at a speed different from that of the constituent waves. This raises the important notion of the group velocity and its relationship to the phase velocity.

① 考虑 - cosine 调制的载波 (7.34). $E(x, t) = E_0(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

假设 $E_0 = \text{const}$. 载波中每个小峰都以相同速度 v 向右运动. $v = -\frac{(\partial \varphi / \partial t)_k}{(\partial \varphi / \partial x)_t}$
 其中 $\varphi = (\bar{k}x - \bar{\omega}t)$. 于是 $v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$

显然, 不论载波是否被调制, 它都是载波的相速度. 在载波被调制的情况下, 峰仅仅是在它们向前流动时周期性地改变振幅.

考虑调制包络. $E_0(x, t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t)$

调制前进速度 $v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$

一般介质中, ω 依赖于 λ (或等价地, k).

则 $\omega = \omega(k) \leftarrow \text{色散关系}$

若以 $\bar{\omega}$ 为中心的 $\Delta \omega$ 很小, 则 $v_g \approx \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\bar{\omega}}$

显然, 还应当考虑另外一种运动, 那就是调制包络的传播. 回到图 7.16a, 并且假定两个组分 $E_1(x, t)$ 和 $E_2(x, t)$ 以相同的速度 $v_0 = \omega_0/k_0$ 前进. 设想把具有不同波长和频率的两个简谐波分别画在二张透明塑料片上, 当它们以某种方式叠合起来时 (像图 7.16a 中那样), 合结果是一个稳定的拍的图样; 若两块塑料片都以同样速度向右移动, 像行波一样, 那么显然拍也将以同样的速度运动. 调制包络前进的速度叫做群速度, 符号为 v_g . 在这种情况下, 群速度等于载波的相速度 (平均速度 $\bar{\omega}/\bar{k}$). 换句话说 $v_g = v = v_1 = v_2$. 这个结论只适用于非色散介质. 在这种介质中相速度不依赖于波长, 因此两列波可以有相同的速度.

只有相速度 v 不依赖于波长 λ 时, $v_g = v$

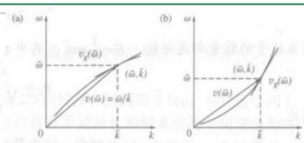


图 7.20 色散关系曲线. (a) 正常色散区, $v(\bar{\omega}) > v_g(\bar{\omega})$. (b) 反常色散区, $v_g(\bar{\omega}) > v(\bar{\omega})$. 在任何频率 ω 处的相速度 v 是从原点到曲线上 $(\bar{\omega}, \bar{k})$ 这一点直线的斜率. 而群速度是色散关系曲线上 $(\bar{\omega}, \bar{k})$ 这一点切线的斜率. $\bar{\omega}$ 是波群的平均频率

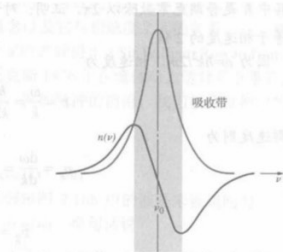


图 7.19 在原子共振附近折射率与频率典型的色散曲线. 图中也画出了在共振频率区的吸收曲线

(要知道实际上怎么做, 请做习题 7.37). 调制或信号传播的速度 v_g 可以大于、等于或小于载波的相速度 v . 深水表面波的群速度 (习题 7.29) 是相速度的一半, 而弦上的波则 $v = v_g$.

由 $\omega = kv$, $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = v + k \frac{dv}{dk}$

得 $v_g = v + k \frac{dv}{dk} \rightarrow (1.3.5.1)$

非色散介质, v 不依赖于 λ , $\frac{dv}{dk} = 0$, $v_g = v$ (真空中 $v_g = c$)
 色散介质, $v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$

正常色散区, $\frac{dn}{dk} > 0$, $v_g < v$

对群速度的 $n_g \equiv \frac{c}{v_g}$

eg 7.2 例题 7.2 量子力学中，一个波包的 $\omega = \hbar k^2 / 2m$ (像图 7.18 那样)，代表质量为 m 的自由粒子。其中 $\hbar$ 是普朗克常数除以 2π 。证明：对于自由粒子波函数，群速度 (对应于经典粒子速度) 等于相速度的 2 倍。

相速度 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$

群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$

$\therefore v_g = 2v$

另外, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $p = \frac{h}{\lambda}$ 故 $k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$

又 $E = \frac{p^2}{2m}$ 故 $v = \frac{\hbar k}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$ (相速度)

粒子能量均为动能, 设 $E = \frac{1}{2} m v_c^2$, v_c 为粒子经典速度。

$\therefore v_c = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v = v_g$

7.29 表面波在深度远远大于 λ 的液体中的传播速度由下式给出:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda}}$$

其中 g =重力加速度, λ =波长, ρ =密度, Y =表面张力。计算在长波极限情形 (它们叫做重力波) 脉冲的群速度。

7.30* 证明群速度可以写成

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

7.31 证明群速度可以写成

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

7.32* 记住上个习题的结果, 证明

$$n_g = n(v) + v \frac{dn(v)}{dv}$$

7.33* 记住上个习题的结果, 证明

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

7.29 由 $v = v\lambda$ 得 $v = \sqrt{\frac{g}{2\lambda} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda^3}}$

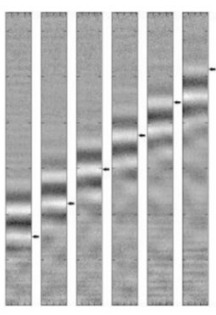
$$\therefore v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{\lambda d(1/\lambda)} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2\lambda} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda^3} \right)^{-1/2} \left(\frac{g}{2\lambda} + \frac{6\pi Y}{\rho\lambda^4} \right)$$

极限?

7.39* 等离子体对电磁波是个色散介质。色散关系为

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

其中 ω_p 是常数, 为等离子体频率。求相速度和群速度的表达式, 证明 $v_{vg} = c^2$ 。



A sequence of ripple tank photos of a wave packet traveling in the upward direction starting at the left. The arrows mark the crest, which travels faster than the packet, and eventually vanishes at its leading edge (top right). This sort of normal dispersion corresponds to $v > v_g$. (B. Strobel, "Demonstration and study of the dispersion of water waves with a computer-controlled ripple tank," Am. J. Phys. 79(6), 581-590 (June, 2011), American Association of Physics Teachers)

EXAMPLE 7.3

Consider Michelson's 1885 experiment in which the two standard wavelengths used are $\lambda_F = 486.1 \text{ nm}$ and $\lambda_D = 589.2 \text{ nm}$. The corresponding indices of refraction are $n_F = 1.652$ and $n_D = 1.628$. Using the results of Problem 7.36, determine the

group velocity in the medium (CS_2) and compare it to the average value of the phase velocity.

From 7.36. $v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$
 $= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$

Here, $v_g = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$

$\bar{n} = \frac{n_F + n_D}{2}$, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_F + \lambda_D}{2}$

$\Delta n = \frac{n_F - n_D}{2}$, $\Delta \lambda = \frac{\lambda_F - \lambda_D}{2}$, $\frac{dn}{d\lambda} < 0$

$\Rightarrow v_g = 1.681 \times 10^8 \text{ m/s}$

compare: one-phase velocity $\bar{v} = \frac{c}{\bar{n}} = 1.028 \times 10^8 \text{ m/s}$

$\Rightarrow \bar{v} > v_g$

7.30. Pf: $v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{dv}{-1/\lambda^2 d\lambda}$$

$\times v = \lambda v \therefore dv = -\frac{v}{\lambda^2} d\lambda + \frac{dv}{\lambda}$

代入得 $v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ □

7.31 Pf: $v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d(\frac{\omega}{v})} = \frac{d\omega}{-\frac{\omega}{v^2} dv + \frac{d\omega}{v}} = \frac{1}{\frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \frac{dv}{d\omega}}$$

$$= \frac{c}{n - (\omega \frac{1}{v} \frac{dv}{d\omega})} = \frac{c}{n - \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

$dn = d(\frac{c}{v}) = -\frac{c}{v^2} dv$ □

7.32 Pf: $n_g = n(v) + v \frac{dn(v)}{dv}$

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n(v) + \omega \frac{dn(v)}{d\omega} = n(v) + v \frac{dn(v)}{dv}$$

7.33 Pf: $n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$

$\therefore n_g = n + v \frac{dn}{dv} = n + v \left(-\frac{v}{\lambda} \right) \frac{dn}{d\lambda} = n - \frac{v^2}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$

$\frac{dn}{dv} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dv} \stackrel{\lambda = \frac{c}{v}}{=} \frac{dn}{d\lambda} \left(-\frac{c}{v^2} \right)$ (chain rule)

7.36* 证明群速可以写成

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

7.37* 水 (在 20°C) 对波长 $\lambda_1 = 656.3 \text{ nm}$ 的光波的折射率为 $n_1 = 1.3311$, 对波长 $\lambda_2 = 589.3 \text{ nm}$ 的折射率为 $n_2 = 1.3330$. 求出光在水中群速的近似值。是不是 $\bar{v} = v_g$ (提示: 再读习题 7.36, 微分用有限差分来近似, 记住小 Δ 在 v_g 中的定义。小心 n 随 λ 变化的斜率)。

7.36: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{d(\frac{c}{\lambda})}{d(\frac{1}{\lambda})} = \frac{d(\frac{c}{n\lambda})}{d(\frac{1}{\lambda})}$

$$= \frac{c \left(-\frac{1}{n^2} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{n} \frac{1}{\lambda^2} \right)}{-\frac{1}{\lambda^2} d\lambda} = \frac{c \lambda \left(\frac{dn}{n^2} + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{\lambda^2} d\lambda} = \frac{c}{n} + \frac{c \lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

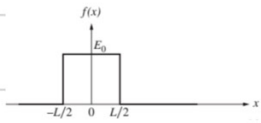
7.37: $\frac{dn}{d\lambda} \approx \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\lambda \approx \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, $n \approx \frac{n_1 + n_2}{2}$

代入 (7.36) 中式 得 $v_g = 2.212 \times 10^8 \text{ m/s} \neq \bar{v}$

傅里叶光学

FT: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right] e^{-i\omega t} d\omega$ 此外取 $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$
 $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

Case 1. Square Pulse

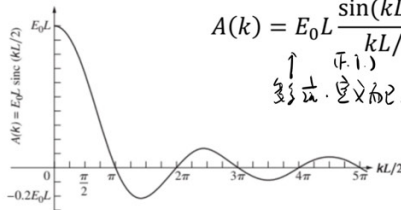


$$f(x) = \begin{cases} E_0 & \text{when } |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{when } |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ is even.

$$A(k) = E_0 L \frac{\sin(kL/2)}{kL/2}$$

多这 $\frac{1}{k}$ 的因子而已. 没什么.



$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} E_0 \int_0^{L/2} \cos kx dx$$

$$= \frac{E_0}{\pi k} \sin kx \Big|_0^{L/2}$$

$$= \frac{E_0}{\pi k} \sin(kL/2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} E_0 L \frac{\sin(kL/2)}{kL/2}$$

$f(x)$ 第1个零点: $\frac{kL}{2} = \pi, k_0 = \frac{2\pi}{L}$
 $f(x)$ 也归: $k_0 \times \frac{1}{2} \times L = \pi = \text{const.}$

Case 3. Gaussian Function

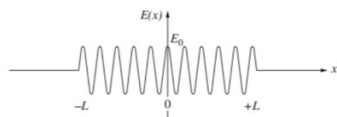
算过几次, 以后再说.

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$f(k) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}}$$

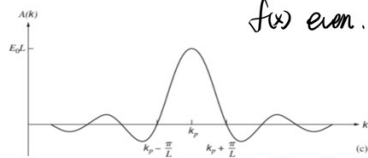
$$\Delta x \times \Delta k \sim a \times \frac{2}{a} \sim 2$$

Case 2. Cosine Wavetrain



$$f(x) = \begin{cases} E_0 \cos k_p x & \text{when } |x| \leq L \\ 0 & \text{when } |x| > L \end{cases}$$

$f(x)$ even.



$$A(k) = E_0 L \left[\frac{\sin[(k_p + k)L]}{(k_p + k)L} + \frac{\sin[(k_p - k)L]}{(k_p - k)L} \right]$$

$$2\pi \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos kx dx$$

$$= E_0 \int_{-L}^{+L} \cos k_p x \cos kx dx$$

$$= \frac{E_0}{2} \int_{-L}^{+L} [\cos(k_p + k)x + \cos(k_p - k)x] dx$$

$$\uparrow \cos k_p \cdot \cos kx = [\cos(k_p + k)x + \cos(k_p - k)x] / 2$$

$$= \frac{E_0}{2} \left[\frac{1}{k_p + k} \sin(k_p + k)x + \frac{1}{k_p - k} \sin(k_p - k)x \right] \Big|_{-L}^{+L}$$

$$= \frac{E_0}{k_p + k} \sin(k_p + k)L + \frac{E_0}{k_p - k} \sin(k_p - k)L$$

$$= E_0 L \left[\frac{\sin(k_p + k)L}{(k_p + k)L} + \frac{\sin(k_p - k)L}{(k_p - k)L} \right]$$

Typical Coherence Length of Various Light Sources

Source	Mean wavelength	Linewidth	Coherence Length
Thermal IR (8-12 um)	10 um	~ 4 um	~ 25 um
White light	550 nm	~ 300 nm	~ 8000 nm
Stabilized He-Ne laser	632.8 nm	10 ⁻⁶ nm	400 m
Special He-Ne laser	1153 nm	9x10 ⁻¹¹ nm	1.5x10 ⁷ m

7.17* Show that a standing wave created by two unequal-amplitude waves

$$E_I = E_0 \sin(kx \mp \omega t)$$

and

$$E_R = \rho E_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

has the form

$$E = 2\rho E_0 \sin kx \cos \omega t + (1 - \rho) E_0 \sin(kx \mp \omega t).$$

Here ρ is the ratio of the amplitude reflected to the amplitude incident. Discuss the meaning of the two terms. What happens when $\rho = 1$?

7.56* A blue-light LED with a mean vacuum wavelength of 446 nm has a linewidth of 21 nm. Determine its coherence time and coherence length.

$$\Delta \lambda \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta \nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda; \quad t_c = \frac{1}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}$$

7.58 The first* experiment directly measuring the bandwidth of a laser (in this case a continuous-wave Pb_{0.88}Sn_{0.12} Te diode laser) was carried out in 1969. The laser, operating at $\lambda_0 = 10600$ nm, was heterodyned with a CO₂ laser, and bandwidths as narrow as 54 kHz were observed. Compute the corresponding frequency stability and coherence length for the lead-tin-telluride laser.

7.61* Suppose that we have a filter with a pass band of 1.0 Å centered at 600 nm, and we illuminate it with sunlight. Compute the coherence length of the emerging wave.

$$7.17 \quad E_I + E_R = \rho E_0 [\sin(kx \mp \omega t) + \sin(kx \pm \omega t)] + (1 - \rho) E_0 \sin(kx \mp \omega t)$$

$$= \rho E_0 [\sin kx \cos \omega t \mp \sin kx \omega t + \sin kx \cos \omega t \pm \sin kx \omega t] + (1 - \rho) E_0 \sin(kx \mp \omega t)$$

$$\Rightarrow \rho E_0 \sin kx \cos \omega t + (1 - \rho) E_0 \sin(kx \mp \omega t)$$

Standing wave

A wave transforms over time

$$E_I + E_R \xrightarrow{\text{if } \rho=1} 2E_0 \sin kx \cos \omega t \quad \text{A pure standing wave.}$$

$$7.56 \quad c = \lambda \nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \Delta \nu = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

$$\therefore \Delta t = \frac{1}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda} = \frac{2 \times 446^2 \times 10^{-18}}{3 \times 10^8 \times 21 \times 10^{-9}} = 6.31 \times 10^{-14} \text{ s}$$

$$\Delta l = c \Delta t = \frac{2 \lambda^2}{\Delta \lambda} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ m}$$

这里约定取 $\Delta k \Delta x = \Delta \omega \Delta t = 4\pi$. 不约定结果不同最好相信

$$7.58 \quad \Delta \nu = 54 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$\text{Def frequency stability} := \frac{\Delta \nu}{\nu}, \text{ then } \frac{\Delta \nu}{\nu} = \Delta \nu \cdot \frac{\lambda}{c} = 1.91 \times 10^{-9} \text{ (c.c.)}^0$$

$$\Delta l = c \Delta t = c \frac{1}{\Delta \omega} = c \frac{2\pi}{\Delta \omega} = \frac{2 \times 3 \times 10^9}{54 \times 10^3} = 1.11 \times 10^4 \text{ m}$$

$$7.61 \quad \text{Explain "a pass band of } 1.0 \text{ Å" as } \Delta \lambda = 1.0 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$\therefore k \lambda = 2\pi \Rightarrow \Delta k = \left| \frac{2\pi}{\lambda^2} \right| \Delta \lambda$$

$$\therefore \Delta x = \frac{1}{\Delta k} = \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta \lambda} = 7.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

正负号 2305199

何为相干?

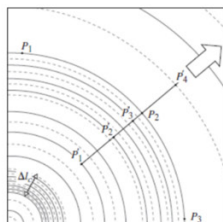
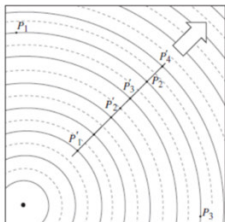
空间相干: 波前的畸变程度
时间相干: 频率/波长的稳定程度 or 在多长时间可以准确预言波的相位

Conditions for interference

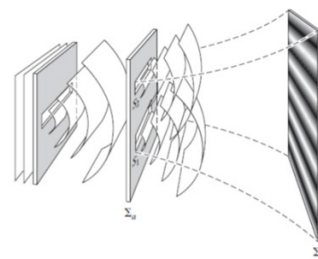
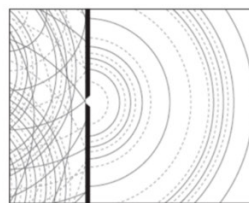
Stable fringes: the same frequency

Clearest fringes: equal or nearly equal amplitude

- **Polarization**
- **Temporal coherence** (ω) is a manifestation of spectral purity.
- **Spatial coherence** (k) is a manifestation of wavefront distortion.



Original Young's experiment



Due to symmetry, the primary wavefront arriving at the two slits will be exactly **in-phase**, and the slits will constitute two coherent secondary sources. Whatever the two waves coming from S1 and S2 overlap, interference will occur (because **OPD < coherence length**).

缝宽 $b \rightarrow 0$ 时, 波前不畸变. 若此时光频率变化, 则条纹间距会变化.

时间相干:

相干长度与相干时间

7.4.3 相干长度

$$\begin{cases} \Delta t_c = \frac{\Delta l_c}{c} \\ \Delta l_c = c \Delta t_c \end{cases}$$

我们来考察一个不严格的单色光源 (如钠光灯) 发出的光。让光束通过某种光谱分析仪, 就能观察它的各种频率成分。典型情况是, 我们会发现存在一些很窄的频段, 它们包含了大部分的能量, 这些频段被比它得多的暗区分开。每条这样的明亮色带叫做一条谱线。在有些装置中光是从狭缝射入的, 每根谱线实际上是那条狭缝的彩色像。另外一些分析器则将频率分布显示在示波器的荧光屏上。不论哪种情况, 单根谱线决不可能无限尖锐。它们总是由一段频带组成, 不管这段频带多么窄 (图 7.45)。

引起光的产生的电子跃迁历时约为 10^{-8} s 到 10^{-9} s 的量级。因为发射的波列的长度有限, 频率将会展宽, 叫做自然线宽 (见 11.3.4 节)。而且, 由于原子在作无规热运动, 多普勒效应也会使频谱发生改变。还有, 原子受到碰撞而使波列中断, 又会使频率分布变宽。所有这些机制的总效果, 是每一谱线具有一定的带宽 $\Delta \nu$ 而不是一个单一频率。满足 (7.63) 式的时间间隔 Δt 称为相干时间 (以后记为 Δt_c), 而由

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta \nu} \quad (7.64)$$

给出的长度 Δl_c 是相干长度。现在清楚了, 相干长度就是空间的一个大小范围, 在这个范围里波是很好的正弦波, 它的相位可以可靠地预言。对应的时间长短就是相干时间。这些概念在研究波与波的相互作用中十分重要, 讨论波的干涉还要讲到。

偏振与相干

P451起. P489.

窄的带宽意味着大的相干时间。如果我们是在长得多的时间间隔内来观察这个波，那么振幅和相角也会有变化，不是相互独立地变就是彼此有些相关地变。如果变化是完全不相关的，只有在短于相干时间的时间间隔内，偏振态才保持不变。换句话说，描述偏振态的椭圆可能改变形状、取向及旋转方向。实际上，现有的检测器不能辨认持续时间这样短的任何一特定的态，于是我们得出结论，认为波是不偏振的。

相反，若 $E_{ox}(t)/E_{oy}(t)$ 保持不变（纵使分子和分母都变化），并且 $\epsilon = \epsilon_x(t) - \epsilon_y(t)$ 也不变，这个波就是偏振波。在这里，这些不同函数之间相关的必要性，表现得十分明显。只要令光波通过一个起偏器，我们实际上就可以把这些条件强加给光波，而去掉任何不需要的成分。由于波的分量之间已经有了合适的相关性，波维持其偏振态的时间间隔因而不再依赖于带宽。纵使光是多色的（甚至是白光），但仍完全是偏振的，它的性质和 8.1 节讨论的理想单色波十分相像。

在完全偏振光和完全不偏振光两个极端之间，存在部分偏振的状态。事实上可以证明，任何准单色波都可以用一个偏振波和一个非偏振波之和来表示，这两个波互相独立，任何一个可以为零。

互补色：两种颜色的光相加得到白光。

菲涅耳和阿拉果对偏振光产生干涉的条件进行了广泛的研究，他们的结论总结了上面的一些考虑。菲涅耳-阿拉果定律是

- (1) 两个正交的相干 $\mathcal{P}$ 态不能干涉， $I_{12} = 0$ ，没有条纹产生。
- (2) 两个平行的相干 $\mathcal{P}$ 态会干涉，和自然光的干涉一样。
- (3) 自然光本身的两个互相垂直的 $\mathcal{P}$ 态成分不能干涉以生成可观测的条纹，即使把一个 $\mathcal{P}$ 态转到和另一个 $\mathcal{P}$ 态平行也不行。最后这一点好理解，因为这两个 $\mathcal{P}$ 态是不相干的。

P389: EX 7.54, 7.55.

傅里叶理论

考虑一余弦波列 $E(x) = \begin{cases} E_0 \cos k_p x, & -L \leq x \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$
(该脉冲选择在空域上，时域上等效的)。

傅里叶变换： $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos kx dx + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \sin kx dx$
其中 $A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx$, $B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx$.

$A(k)$ 可解释为 $k \sim k+dk$ 之间空间角频率区间的余弦分量的振幅 $B(k)$ 同理。
(奇函数)

对余弦波列作 F.T., 得到 $A(k) = E_0 L [\text{sinc}(k_p + k)L + \text{sinc}(k_p - k)L]$, $B(k) = 0$ (偶函数时)。

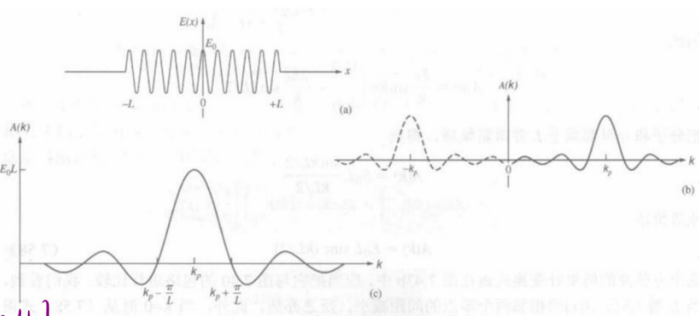


图 7.44 一个有限余弦波列及其变换式

(图 7.44c)。即使波列很长，但既然它不是无限长，它必定是由一段连续的空间频率合成的。因此可以把它看成是由无穷多个简谐波组成。我们把这样的脉冲叫做波包或波群。可以预期，最大的贡献来自 $k=k_p$ 。如果在时域中进行分析，将得到同样的结果，此时变换式的中心在时间角频率 ω_p 附近。很清楚，当波列变成无限长（即 $L \rightarrow \infty$ ）时，其频谱变窄，图 7.44c 的曲线在 k_p (或 ω_p) 处紧缩为一个很高的尖峰。这是理想化的单色波的极限情形。

↑ 代考虑正负时，该项不妨略去。
同样，对时域中的波包 $E(t) = \begin{cases} E_0 \cos \omega_p t, & -T \leq t \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$
变换为 $A(\omega) = E_0 T \text{sinc}[(\omega_p - \omega)T]$.

ω 与 k 通过相速度联系。

频带宽度

对上面研究的特定波包，变换式所含的角频率 (ω 或 k) 的范围肯定不是有限的。但是如果我们来谈变换式的宽度 ($\Delta\omega$ 或 Δk)，图 7.44c 倒提示我们该用 $\Delta k = 2\pi/L$ 或 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。而脉冲的空间或时间范围在 $\Delta x = 2L$ 或 $\Delta t = 2T$ 倒是界限分明的。波包在所谓 k 空间中的宽度和它在 x 空间中的宽度的乘积为 $\Delta k \Delta x = 4\pi$ ，或相似地为 $\Delta\omega \Delta t = 4\pi$ 。我们把量 Δk 或 $\Delta\omega$ 叫做频带宽度。如果我们用一个不同形状的脉冲，带宽-脉冲长度的乘积肯定可以不同。这种意义不明确的情况之所以产生，是因为我们尚未从种种规定 $\Delta\omega$ 和 Δk 的可能方法之中选定一种。例如，不用 $A(x)$ 的第一极小值 (有的变换式没有这样的极小值，如 11.2 节的高斯函数)，而令 $A^2(x)$ 曲线降到它的极大值的 1/2 或者 1/e 点的宽度。不论怎样，目前注意到这点已经够了：由于 $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$,

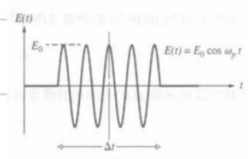
$$\Delta\nu \approx 1/\Delta t \quad (7.63)$$

即频带宽度与脉冲的时间长度的倒数是同一量级 (习题 7.55)。如果波包的带宽很窄，那么它将占据一个很大的空间和时间区域。因此，一台调谐到接收带宽为 $\Delta\nu$ 的收音机，能够探测到的脉冲的持续时间不短于 $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$ 。

这些考虑在量子力学中具有深远的意义。在量子力学中用波包描述粒子，(7.63) 式类似于海森堡测不准原理。

7.54 写出图 P.7.54 的简谐脉冲的变换式 $A(\omega)$ 的表示式。(检验对于 u 值大致小于 $\pi/2$ 时 $\text{sinc } u$ 的值等于或大于 0.5。)用这一点证明 $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ ，其中 $\Delta\nu$ 是变换式的振幅为极大值一半的地方的带宽。同样，证明在功率谱极大值一半的地方 $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ 。这里的意图是为了得到在讨论中所用的近似类型的一些概念。

7.55 推导频带宽度为 $\Delta\nu$ 的波列在真空中的相干长度的表达式；把你所得到的答案用波列的线宽 $\Delta\lambda_0$ 和平均波长 λ_0 来表示。



题图 P.7.54

7.54 $A(\omega) = E_0 T \text{sinc}[(\omega_p - \omega)T]$

1 $\text{sinc } u = \frac{1}{2}$ 得 $u \approx \frac{\pi}{2}$

7.55

偏振

两个正交光波动

$$\begin{cases} \vec{E}_x(z,t) = \hat{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y(z,t) = \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \end{cases}$$

ε 为 E_x 与 E_y 的相位差, $\varepsilon > 0 \rightarrow E_y$ 滞后; $\varepsilon < 0 \rightarrow E_y$ 领先.

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_x(z,t) + \vec{E}_y(z,t).$$

• 线偏振:

$$\varepsilon = 0 \text{ 或 } \varepsilon = k\pi$$

当 $\varepsilon = 2k\pi$ (同相): $\vec{E} = (\hat{i} E_{0x} + \hat{j} E_{0y}) \cos(kz - \omega t)$ $\tan \theta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \rightarrow$

当 $\varepsilon = (2k+1)\pi$ (相差为 180° 时):

$$\vec{E} = (\hat{i} E_{0x} - \hat{j} E_{0y}) \cos(kz - \omega t)$$

• 圆偏振: $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, $\varepsilon = +\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ or $\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$

(左旋) (右旋)

考虑 $\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$, i.e. E_y 领先 E_x $\frac{\pi}{2}$ 相位:

$$\vec{E}_x(z,t) = \hat{i} E_0 \cos(kz - \omega t) \quad \vec{E}_y = \hat{j} E_0 \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{则 } \vec{E} = E_0 [\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t)] = \hat{j} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$\text{此时 } \|\vec{E}\| = E_0 = \text{const}$$

向光源看去, 固定 z : ⤵ 右旋
⤵ 左旋

E_x 领先为左旋

!!(000)!!

• 在光学中偏振光左旋还是右旋, 是相对迎着光束传播的观察方向而言的。在微波技术中, 电磁波的左旋和右旋偏振, 是相对波束传播方向而言的, 和光学中的习惯正好相反。

• 椭圆偏振 (Elliptical Polarized light)

$$\vec{E}_x = \hat{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t); \quad \vec{E}_y = \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)$$

$$\therefore \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t) \cos \varepsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon$$

$$\therefore \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varepsilon = -\sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon$$

$$\text{又 } \sin(kz - \omega t) = (1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2})^{\frac{1}{2}} \therefore (\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varepsilon)^2 = (1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}) \sin^2 \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\frac{E_y}{E_{0y}})^2 + (\frac{E_x}{E_{0x}})^2 - 2(\frac{E_x}{E_{0x}})(\frac{E_y}{E_{0y}}) \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon$$

• 理想, 的平面波总是偏振的

线偏振

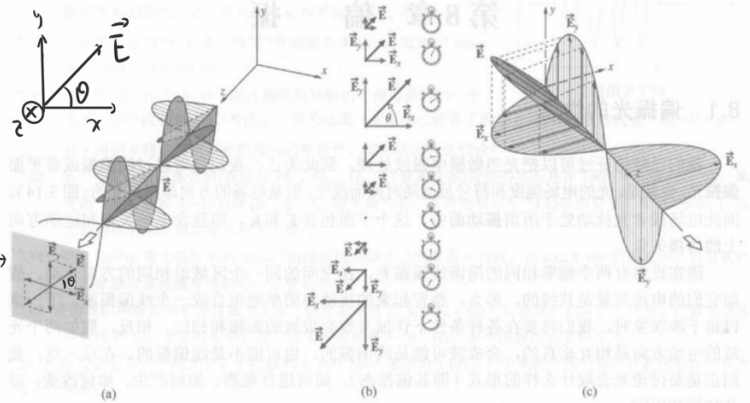
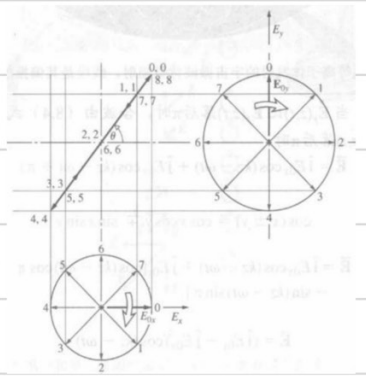


图 8.1 线偏振光。(a) $\vec{E}$ 场在第一和第三象限线偏振。(b) 迎面看这个振荡。(c) 光在第二和第四象限偏振

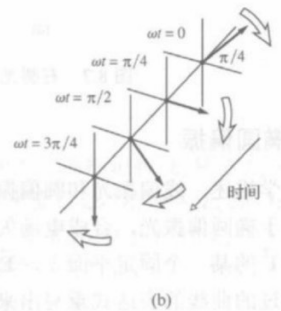
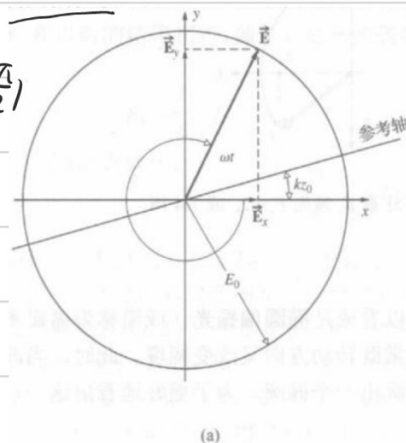


图 8.5 右圆光。(a) 电场振幅不变, 顺时针转动, 转动频率和振荡频率相同。(b) 两个互相垂直的天线, 以 90° 的相位差辐射, 产生圆偏振的电磁波

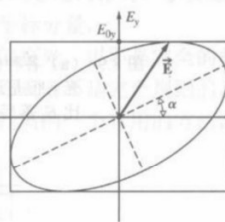
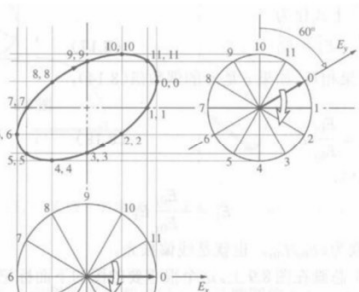
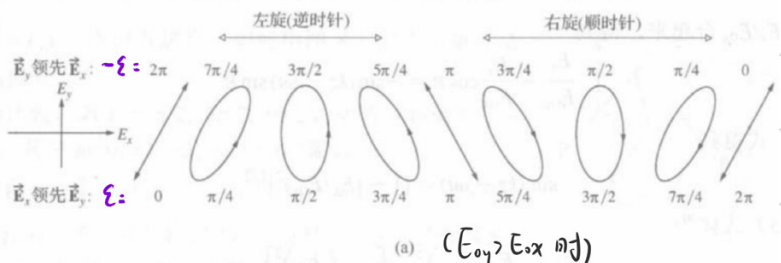


图 8.8 椭圆光。电场矢量转动一周时, 其端点扫出一个椭圆

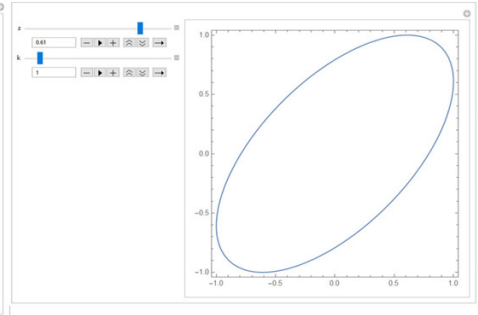
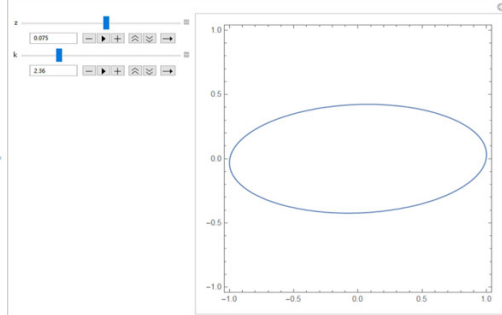
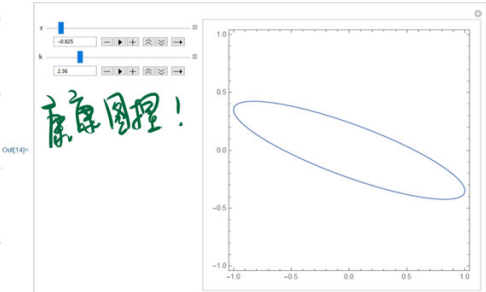
椭圆偏振



$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \varepsilon}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$$



Manipulate[ContourPlot[(k y)^2 + x^2 - 2 k x y + z - (1 - z^2) == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}], {z, -1, 1}, {k, 0.1, 10}]



• 偏振态

线偏振光: P态
右圆光: R态
左圆光: L态
椭圆光: E态

$$\begin{cases} P = R \pm L \\ E = aR \pm bL \end{cases}$$
 (相当基变换)
左旋 & 右旋 可以作为正基



图 8.11 R 态和 L 态光叠加成椭圆光

$$\theta = kx - \omega t, \vec{E} = E_x \cos \theta \hat{i} + E_y \cos \theta (\theta + \epsilon) \hat{j}$$

$$\hat{R} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{L} = \cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$$

代入得
$$\vec{E} = \left(\frac{E_x}{2} + \frac{E_y \cos(\theta + \epsilon)}{2 \sin \theta} \right) \hat{R} + \left(\frac{E_x}{2} - \frac{E_y \cos(\theta + \epsilon)}{2 \sin \theta} \right) \hat{L}$$

• 随机偏振光: $I = \frac{1}{2} I_0$ (I_0 为入射光光强)

在数学上, 我们可以用任意两个振幅相等的、非相干的 (非相干波就是相对相位差进行迅速而无规变化的波)、正交的线偏振波来表示自然光。

$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ 为能量密度

• 马吕斯定律 (Malus' Law): $I(\theta) = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2 \theta = I(0) \cos^2 \theta$
↑
到达探测器的辐照度

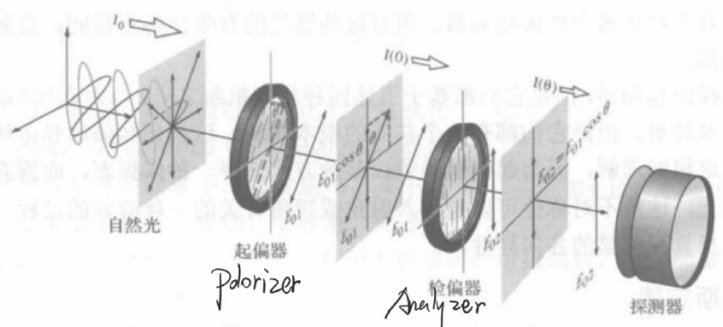


图 8.14 线起偏器和线检偏器——马吕斯定律。辐照度 I_0 的自然光入射在线起偏器上, 起偏器的透光轴和垂直轴成 θ 角, 离开起偏器时辐照度 $I_1 = I(0)$ 。检偏器的透光轴和起偏器的透光轴成 θ 角, 离开检偏器时辐照度为 $I(\theta)$

• 光子的角动量 P417-P418

• 起偏器

有各式各样的起偏器, 但是它们都基于下述四种物理机制之一: 二向色性 (或选择吸收)、反射、散射及双折射。但是它们都有一个共同的根本性质, 这就是起偏过程必须有某种形式的不对称性。这很好理解, 因为起偏器必须以某种方式选择一种偏振态, 而摒弃所有其他的偏振态。实际上, 这种不对称性可以是和入射角或视角有关的一种微妙的过程, 但更多的是起偏器材料本身具有明显的各向异性。

eg. 例题 8.3 一个 1000 W/m^2 的线偏振光来的电场在第一、第三象限和垂直轴成 $+10.0^\circ$ 振荡。光束垂直地相继通过两个理想的线偏振器。第一个偏振器的透过轴位于第二、第四象限, 和垂直轴成 -80° 。第二个偏振器的透过轴位于第一、第三象限, 和垂直轴成 $+55.0^\circ$ 。(a) 多少光从第二个偏振器透过? (b) 让这两个偏振器对调位置而不改变它们的取向, 求通过光的量。解释你的答案。

(a) 显然, 没有光通过第一个偏振器, 第二个也是。 (b) 解释: 通过偏振器的顺序很重要。

(b) 由 $I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$, $I_1 = I_0 \cos^2 (10^\circ - 10^\circ) = 1000 \text{ W/m}^2$, $I_2 = I_1 \cos^2 (55^\circ + 80^\circ) = 250 \text{ W/m}^2$

偏振度 $P = \frac{I_p}{I} = \frac{I_p}{I_p + I_n} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

P442

· 自然光 $I_{\max} = I_{\min}$, $P = 0$, 又叫非偏振光。圆偏振光也是。

· $I_{\min} = 0$ 时, $P = 1$, 为全偏振光。50°线偏振光。

常常要用到偏振度 V 这个概念, 它的定义为

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_n}$$

(8.33)

其中, I_p 和 I_n 分别为偏振光和非偏振光的光通量密度。例如, 若 $I_p = 4 \text{ W/m}^2$, $I_n = 6 \text{ W/m}^2$, 那么 $V = 40\%$, 光束是部分偏振的。非偏振光 $I_p = 0$, 因而明显地有 $V = 0$, 另一个极端是 $I_n = 0$, $V = 1$, 光完全偏振; 因而, V 的范围是 $0 \leq V \leq 1$ 。我们时常要跟部分线偏振准单色光打交道, 此时, 若在光束中(旋转检偏器) 那么将有(一个方向) 其透射的辐照度为极大值 ($I_{\max}$), 而垂直于这个方向的透射光辐照度为极小值 ($I_{\min}$)。显然, $I_p = I_{\max} - I_{\min}$, 所以

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

(8.34)

注意, V 实际上是光束的一个性质, 在遇到任何偏振器之前, 光束既可以是部分偏振的, 也可以是完全偏振的。

折射与反射 —— 关于电磁本性

• 电磁场的边界条件:

① ϵ_1, μ_1 $\hat{n}$ ϵ_2, μ_2 作一无限薄圆柱体.

由 Gauss Law, $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_{2n} - D_{1n})S = Q_f$

$$\therefore D_{2n} - D_{1n} = \rho_f \quad ①$$

由磁场的 Gauss Law, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\text{得 } B_{1n} = B_{2n} \quad ③$$

② ϵ_1, μ_1 $\hat{t}$ ϵ_2, μ_2 作一无限窄磁路.

由 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 得 $(E_{1t} - E_{2t})l = 0$.

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \quad ②$$

由 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f \xrightarrow{\text{无面电流}} 0$

$$\text{得 } H_{1t} = H_{2t} \quad ④$$

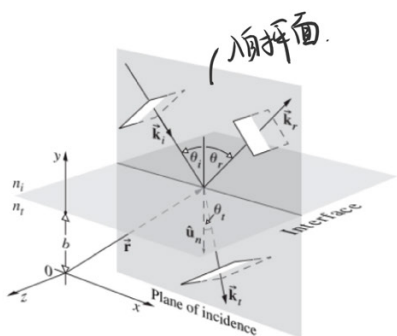


Figure 4.45 Plane waves incident on the boundary between two homogeneous, isotropic, lossless dielectric media.

$\hat{n}$ 为垂直界面的单位矢量, 故 $\hat{n} \times$ (场矢量) 可得其 // 界面的分量大小.

$$\text{即 } \hat{n} \times \vec{E}_i + \hat{n} \times \vec{E}_r = \hat{n} \times \vec{E}_t$$

$\uparrow$ 入射光 $\uparrow$ 反射光 $\uparrow$ 透射光

$$\text{i.e. } \hat{n} \times \vec{E}_{oi} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \hat{n} \times \vec{E}_{or} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \epsilon_r) = \hat{n} \times \vec{E}_{ot} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \epsilon_t)$$

ϵ_r 与 ϵ_t 为 $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$ 相对于 $\vec{E}_i$ 的相位常量.

引入的原因: 坐标原点不唯一.

This relationship must obtain at any instant in time and at any point on the interface ($y=b$). Consequently, $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, and $\vec{E}_t$ must have precisely the same functional dependence on the variables t and r , which means that:

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)|_{y=b} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)$$

对一切 t 均成立 $\rightarrow t$ 系数必相等: $\omega_i = \omega_r = \omega_t$

(i.e. 被散射的任何光同频率).

$$\therefore \vec{k}_i \cdot \vec{r}|_{y=b} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \epsilon_r)|_{y=b} = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} + \epsilon_t)|_{y=b}$$

$$\therefore [(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]|_{y=b} = \epsilon_r = \text{const}$$

$\vec{k}_i$ 和 $\vec{k}_r$ 是常矢量哦.

$\vec{r}$ 的端点在界面上

$\therefore \vec{r}$ 的端点扫出一个 $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ 的平面 (即入射光与反射光 r 在同一介质中, 实得 $k_i = k_r$)

$\rightarrow$ 这个平面就是界面.

$$\therefore \hat{n} \times (\vec{k}_i - \vec{k}_r) = 0$$

$$\therefore k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \xrightarrow{k_i = k_r} \theta_i = \theta_r$$

$\leftarrow$ 反射定律

Law of Reflection

同理, $k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$. ③ 乘 c/ω_i (有 $\omega_i = \omega_t$ 哦)

$$\rightarrow n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \leftarrow \text{Snell's Law (折射率 } n_i = \frac{c}{v_i} = \frac{ck_i}{\omega_i})$$

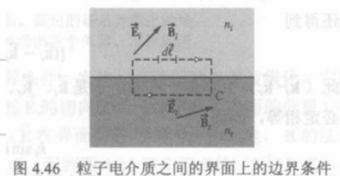


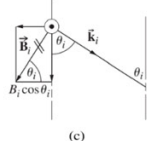
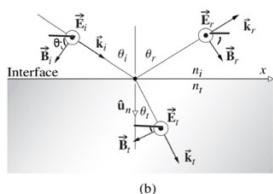
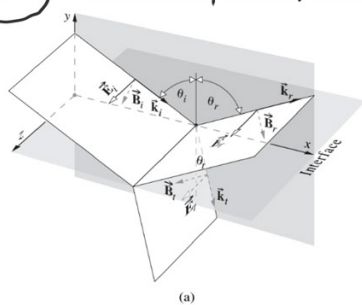
图 4.46 粒子电介质之间的界面上的边界条件

• The Fresnel Equations: 反射-折射中振幅的关系. 由边界 Fresnel 方程可知, 反射-折射中 电场场的 // 与 ⊥ 分量关系

(Case 1): $\vec{E} \perp \text{plane-of-incidence}$

$$\vec{E} = v\vec{B} \quad \therefore \hat{k} \times \vec{E} = \vec{B} \quad \text{and} \quad \hat{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (\text{此时 } \hat{k}, \vec{B}, \vec{E} \text{ 构成右手系})$$

↓
或者: $-\vec{B}$ 也行, 最后是一样的.



从 BC 可知.

$$\begin{cases} E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \\ -\frac{B_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_r}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos \theta_t \quad (\text{向右为正}) \end{cases} \quad \text{又 } \mu_i = \mu_r, v_i = v_r, \theta_i = \theta_r$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \\ \frac{\cos \theta_i n_i}{\mu_i} (E_{oi} - E_{or}) = \frac{\cos \theta_t n_t}{\mu_t} E_{ot} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{oi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta_t n_t}{\cos \theta_i n_i} + 1 \right) E_{ot} \\ E_{or} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos \theta_t n_t}{\cos \theta_i n_i} \right) E_{ot} \end{cases}$$

$$\therefore r_{\perp} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{\cos \theta_i \frac{n_i}{\mu_i} - \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}}{\cos \theta_i \frac{n_i}{\mu_i} + \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}} \quad \text{振幅反射系数}$$

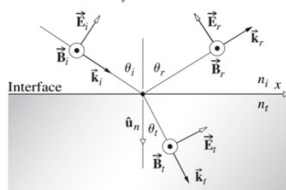
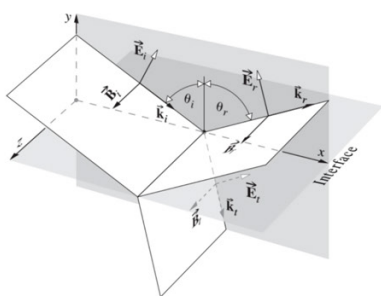
$$t_{\perp} = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}}{\cos \theta_i \frac{n_i}{\mu_i} + \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}} \quad \text{振幅透射系数}$$

发现:

$$t_{\perp} - r_{\perp} = 1$$

(Case 2): $\vec{E} \parallel \text{plane of incidence}$

From BC,



$$\begin{cases} E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_r = E_{ot} \cos \theta_t \\ \frac{B_i}{\mu_i} + \frac{B_r}{\mu_r} = \frac{B_t}{\mu_t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_i (E_{oi} - E_{or}) = E_{ot} \cos \theta_t \\ \frac{n_i}{\mu_i} (E_{oi} + E_{or}) = \frac{n_t}{\mu_t} E_{ot} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{oi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{\mu_i n_t}{\mu_t n_i} \right) E_{ot} \\ E_{or} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{\mu_i n_t}{\mu_t n_i} \right) E_{ot} \end{cases}$$

$$\therefore r_{\parallel} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{\cos \theta_i \frac{n_t}{\mu_t} - \cos \theta_t \frac{n_i}{\mu_i}}{\cos \theta_i \frac{n_t}{\mu_t} + \cos \theta_t \frac{n_i}{\mu_i}}$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_t \frac{n_i}{\mu_i}}{\cos \theta_i \frac{n_t}{\mu_t} + \cos \theta_t \frac{n_i}{\mu_i}}$$

For: $r_{\perp} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{\cos \theta_i \frac{n_i}{\mu_i} - \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}}{\cos \theta_i \frac{n_i}{\mu_i} + \cos \theta_t \frac{n_t}{\mu_t}}$

insert in " $n_t \sin \theta_t = n_i \sin \theta_i$ ".

$$\Rightarrow \frac{-\mu_i \cos \theta_t \sin \theta_i + \mu_t \cos \theta_i \sin \theta_t}{\mu_t \cos \theta_t \sin \theta_i + \mu_i \cos \theta_i \sin \theta_t}$$

若材料是“非磁性”的, $\sin(\theta_i - \theta_t)$
“nonmagnetic” $\Rightarrow \mu_i = \mu_r = \mu_t$ $\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$ □

Similarly ...

One further notational simplification can be made using Snell's Law, whereupon the Fresnel Equations for dielectric media become (Problem 4.43)

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (4.42)$$

$$r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (4.43)$$

$$t_{\perp} = +\frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (4.44)$$

$$t_{\parallel} = +\frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (4.45)$$

外反射 ($n_i < n_t$) 条件下的特殊情况

正向入射, $\theta_i = 0$

$$r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n_t - n_i}{n_i + n_t}$$

$$t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

$$r_{\parallel} + t_{\parallel} = 1$$

$$(-r_{\perp}) + t_{\perp} = 1 \text{ (for all } \theta_i)$$

掠角入射

$$\theta_i \rightarrow 90^\circ$$

$$\Rightarrow r \rightarrow -1, t \rightarrow 0$$

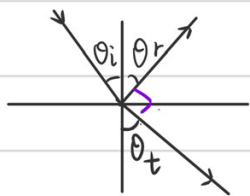
相当于 E_r 与 E_i 反向。
即产生 π 相位突变

布儒斯特角

$$\text{偏振角: } \theta_i + \theta_t = \pi/2 \Rightarrow r_{\parallel} = 0$$

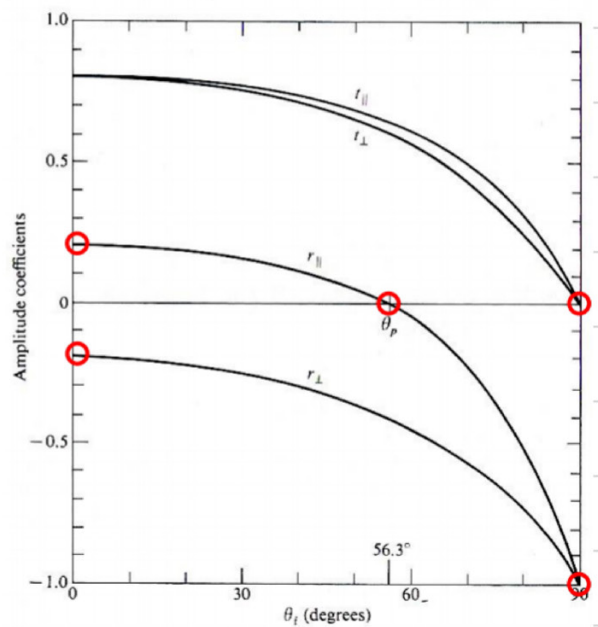
布儒斯特角: $\theta_i = \theta_p = \arctan \frac{n_2}{n_1}$

此时 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, 反射光 r $\perp$ 透射光 t



$$\text{此时 } r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$$

i.e. 无反射, 全透射。
此时出射光变为线偏振光。
故 θ_p 又称偏振角



外反射, $n_t (1.5) > n_i (1)$

由 Snell 定律 $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$,

得 $n_t > n_i$ 时, $\theta_t < \theta_i$

故对 θ_i , $r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} < 0$ ①

$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$ 从正值出发,

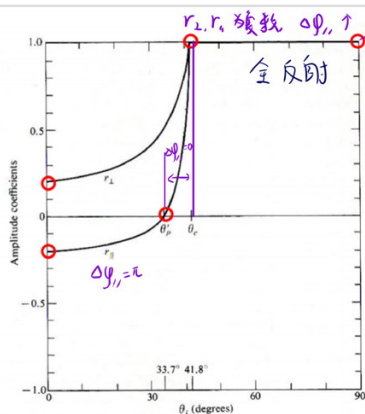
直到 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时 $r_{\parallel} = 0$.

此时入射角为 θ_p (偏振角) ②

且在 θ_p 附近, $r_{\parallel}$ 由正变负, 发生 π 相位突变 ③

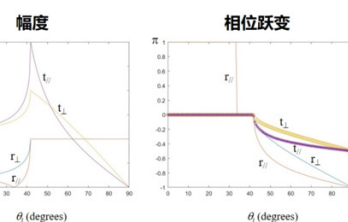
θ_i 再增大至 90° 时, $r_{\parallel} = r_{\perp} = -1$
(掠角入射)

等效于一面反射镜



内反射, $n_i (1.5) > n_t (1)$

内反射条件下的反射与折射
内反射, $n_i (1.5) > n_t (1)$



内反射 ($n_i > n_t$) 条件下的特殊情况

正向入射, $\theta_i = 0$

$$r_{\perp} = -r_{\parallel} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

$$t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

$$r_{\parallel} + t_{\parallel} = 1$$

$$(-r_{\perp}) + t_{\perp} = 1 \text{ (for all } \theta_i)$$

掠角入射

$$\theta_i \rightarrow 90^\circ$$

$$\Rightarrow r \rightarrow 1, t \rightarrow 0$$

$n_i > n_t$ 时, 由 $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$, 得 $\theta_i < \theta_t$

$$\therefore r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} > 0$$
 ①

当 θ_i 从 0° 开始增大至某一值时, $\theta_t = \frac{\pi}{2}$
记此时 $\theta_i = \theta_c$ ②

而 $r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$ 在 $\theta_i = 0$ 时为负

在 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 即 $\theta_i = \theta_p$ 时, $r_{\parallel} = 0$ ③

之后 $r_{\parallel} > 0$ 且 $\uparrow$. 当 $\theta_i = \theta_c$ 时增加到 1.

偏振角: $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \Rightarrow r_{\parallel} = 0$

临界角 (Critical angle): $\theta_c = \pi/2$

· 相移多

$n_i < n_t$ 时, $r_{\perp} < 0$, 即边界上 $[\vec{E}_i]_{\perp}$ 与 $[\vec{E}_r]_{\perp}$ 反平行,

垂直入射面的电场分量 在反射中 发生 π 相位突变.

而 $t_{\perp}$ 与 $t_{\parallel} > 0$, $\Delta\phi = 0$.

$n_i > n_t$ 时, $\theta_i < \theta_c$ 时, $r_{\perp} > 0$, 不发生相移

至于 $\parallel$ 分量, 需先 0 时同相: 入射面上两个场, y 分量平行则同向; 反平行则 相位差 π .

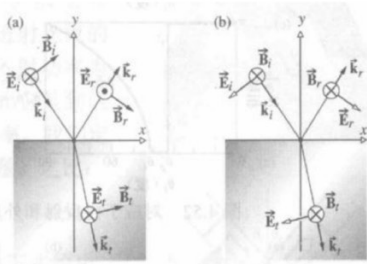


图 4.51 场的取向和相移

由 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 场相伴, 只需确定 $\vec{E}$ 或 $\vec{B}$ 场 同/反相 即可

确定另一场的同/反相.

(4.51a): $\vec{E}_i$ 与 $\vec{E}_r$ 反相, 故 $\vec{B}_i$ 与 $\vec{B}_r$ 反相; $\vec{E}_i$ 与 $\vec{E}_t$ 同相, 故 $\vec{B}_i$ 与 $\vec{B}_t$ 同相

(4.51b): $\vec{B}_i$ 与 $\vec{B}_r$ 同相, 故 $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$ 均同相.

$$(r_i = r_r \approx r_t = 1) \quad r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}, \text{ 当 } n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t > 0, \text{ i.e. } \sin(\theta_i - \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t) > 0 \text{ 时为正.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_i < n_t \text{ 时, 当 } \theta_i + \theta_t < \frac{\pi}{2}, r_{\parallel} > 0, \Delta\phi_{\parallel} = 0. \\ n_i > n_t \text{ 时, 当 } \theta_i + \theta_t > \frac{\pi}{2}, r_{\parallel} < 0, \Delta\phi_{\parallel} = \pi. \end{cases}$$

于是当 $n_i < n_t$ 时, $[\vec{E}_0]_i$ 和 $[\vec{E}_0]_t$ 同相 ($\Delta\phi_i = 0$), 直到 $\theta_i = \theta_p$ 为止, 然后相位差 π 弧度. 这一转变实际上并不是突发的不连续的, 因为 $[\vec{E}_0]_i$ 在 θ_p 处趋于零. 对于内反射则相反, 直到 θ_i' 为止 $r_{\parallel}$ 为负, 这意味着 $\Delta\phi_i = \pi$. 从 θ_p' 到 θ_c , $r_{\parallel}$ 为正, 并且 $\Delta\phi_i = 0$. 超出 θ_c 后, $r_{\parallel}$ 变成复数, 而 $\Delta\phi_i$ 逐渐增加, 在 $\theta_i = 90^\circ$ 时增大到 π .

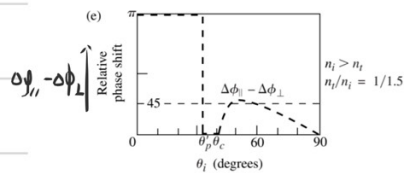
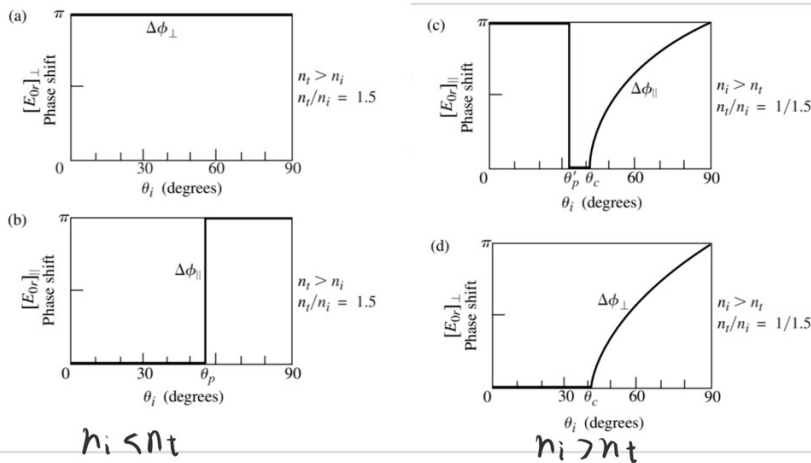


Figure 4.52 Phase shifts for the parallel and perpendicular components of the $\vec{E}$ -field corresponding to internal and external reflection.

相对相移.

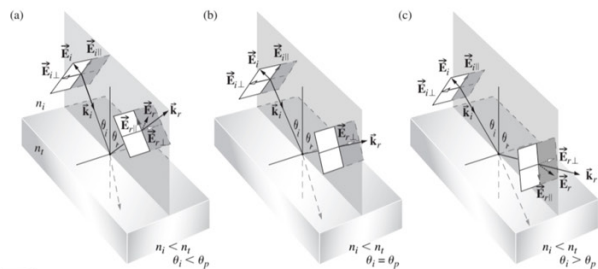


Figure 4.53 The reflected $\vec{E}$ -field at various angles concomitant with external reflection. The fields all occur at the interface. They have been displaced a bit so the vectors could be drawn without confusion.

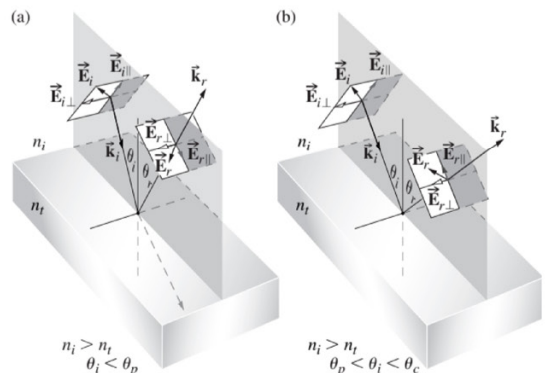
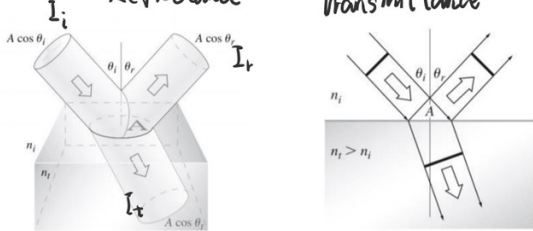


Figure 4.54 The reflected $\vec{E}$ -field at various angles concomitant with internal reflection.

能流反射率与能流透射率

Reflectance

Transmittance



Recall $\vec{S} = v^2 \epsilon \vec{E} \times \vec{B}$
 $I = \langle S \rangle_T = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2$

Def Reflectance $R \equiv \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}$ i.e. $\frac{\text{reflected power}}{\text{incident power}}$

Transmittance $T \equiv \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}$, the ratio of the transmitted flux to the incident flux at λ_i

$R = \frac{v_r \epsilon_r E_{0r}^2 / 2}{v_i \epsilon_i E_{0i}^2 / 2} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$

$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2$ ($n_i = n_t = n_0$)

由能量守恒 $I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t$

$\Leftrightarrow n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_i E_{0r}^2 \cos \theta_r + n_t E_{0t}^2 \cos \theta_t$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} + \frac{n_t E_{0t}^2 \cos \theta_t}{n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i}$ i.e. $R + T = 1$

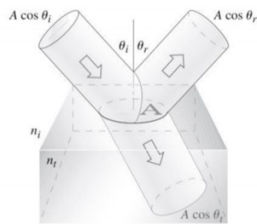
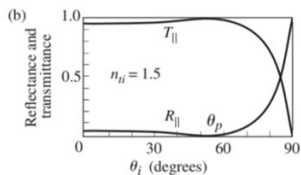
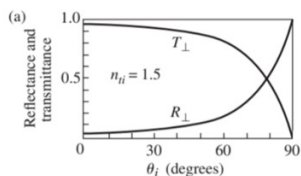
我们无须在任何特定表述下为 r 的符号担心, 这使反射比成为一个方便的概念。注意, 在 (4.57) 式中, T 不简单地等于 r^2 , 这有两个原因。首先, 这里必须有折射率的比率, 因为能量传输到界面内和传出界面的速率是不同的。换句话说, 从 (3.47) 式有 $I \propto v$ 。其次, 入射光束和折射光束的截面积是不同的。因此, 每单位面积的能流受到影响, 这显示在余弦项之比中。

Ex 4.73 $\begin{cases} R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \\ R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \end{cases}$

PIV 3 eg 4.5, 4.6

ps: 对于自然光, $R = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp})$

反射与折射的能量守恒



$I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t$
 $\Rightarrow R + T = 1$

At normal incidence ($\theta_i = 0$)

$R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$
 $T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_i n_t}{(n_t + n_i)^2}$

eg. 法向射向空气-玻璃端 ($n_g = 1.5$) 界面上的光:

$R = \left(\frac{n_g - 1}{n_g + 1} \right)^2 = 4\%$



At near-normal incidence about 4% of the light is reflected back off each air-glass interface. Here because it's a lot brighter outside than inside the building, you have no trouble seeing the photographer who is outside looking in. (E.H.)

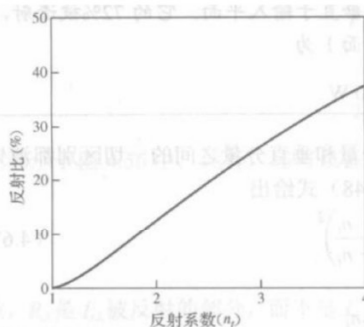


图 4.57 空气 ($n_i = 1.0$) 中正入射时单个界面上的反射比

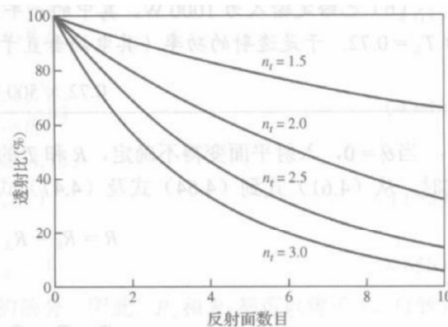
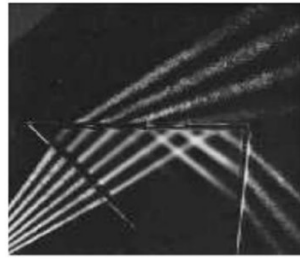
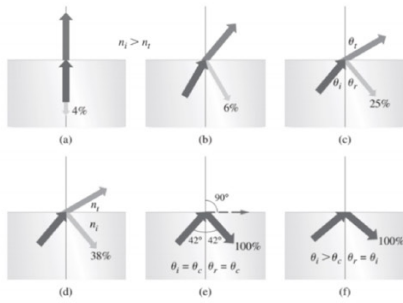


图 4.58 空气 ($n_i = 1.0$) 中以正入射穿过多个界面时的透射比

PIV 4 pg 4.6

Ex 4.58, Ex 4.70, Ex 4.77, 4.78

全反射 ($n_i > n_t$)



(1) 内反射 (2) $\theta_c = 90^\circ$

$$\sin \theta_i = \sin \theta_c = n_{ti} = n_t/n_i$$

(临界角)

如果 $\theta_i \geq \theta_c$, 入射光完全反射回入射介质, 称为全反射。

$$\text{临界角: } \sin \theta_c = n_{ti} = \frac{n_t}{n_i}$$

$$n_i > n_t \text{ 时, } \sin \theta_i = \frac{n_t}{n_i} \sin \theta_t, \quad \left(\frac{n_t}{n_i} = n_{ti} < 1\right)$$

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_i \frac{n_i}{n_t} - \cos \theta_t \frac{n_t}{n_i}}{\cos \theta_i \frac{n_i}{n_t} + \cos \theta_t \frac{n_t}{n_i}} = \frac{\cos \theta_i - (n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\cos \theta_i + (n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{\parallel} = \dots = \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - (n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + (n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}$$

当 $\theta_i > \theta_c$ 时, $\sin \theta_i > n_{ti}$, $r_{\parallel}, r_{\perp}$ 变为复数。

而 $\sin \theta_t > 1$, θ_t 也变为复数

但仍有 $r_{\perp}^* r_{\perp} = r_{\parallel}^* r_{\parallel} = 1$ 及 $R = 1$ (Ex 4.18)

4.78 证明在电介质界面上, 当 $\theta_i > \theta_c$ 时, $r_{\parallel}$ 和 $r_{\perp}$ 是复数, 并且 $r_{\parallel} r_{\parallel}^* = r_{\perp} r_{\perp}^* = 1$ 。

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - (\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2)^{\frac{1}{2}} i}{\cos \theta_i + (\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2)^{\frac{1}{2}} i}$$

$$\therefore r_{\perp}^* r_{\perp} = \frac{a-bi}{a+bi} \cdot \frac{a+bi}{a-bi} = 1. \quad \text{同理, } r_{\parallel}^* r_{\parallel} = 1.$$

$$\text{故 } R = r^* r = 1.$$

负折射. P96, P131. 能流方向与相速度方向相反. (Poynting 矢量)

负折射

我们还记得, 一种材料的折射率通过 (3.59) 式与电容率和磁导率相联系: $n = \pm \sqrt{\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0}$ 。从概念说, 平方根可以为正, 也可以为负, 但从来没人关心后一种可能性。然后, 1968 年, 苏联科学家 V. G. Veselago 证明, 如果一种材料的电容率和磁导率都为负, 这种材料的折射率将会是负的, 并显示种种异乎寻常的特性。那时已经有一些物质, 在适当的情况下和有限的频率范围内显示出 $\epsilon < 0$ 或者 $\mu < 0$, 但是还不知道有透明的或半透明的材料存在, 它们的这二者同时小于零。不奇怪, 这个理论没引起人们的兴趣, 直到几十年后情况才发生变化。

· 散射引起偏振 P937

反射引起偏振 P938-940. 偏振光的偶极辐射解释

例题 8.6

假定 200 W/m^2 的自然光以偏振角入射到一块玻璃上。假定空气-玻璃的总透射率为 92.5%。求在此表面上反射并垂直于入射面的 $\mathcal{I}$ 态光的量。

• 双折射

• 二向色性 Dichroism /'daɪkroɪzəm/

对入射光束的两个正交的偏振分量，只选择吸收其中一个，这是最广义的二向色性。二向色性偏振器自身在物理上是各向异性的，对一个方向上的电场分量产生强烈的不对称吸收或择优吸收，而对另一分量基本上是透明的。

• 线栅起偏器 P421, P423-P425

电场 y 分量 在导线长度方向上驱动传导电子，产生电流，

电子与晶格不断碰撞，能量转化为焦耳热。

P: 有几种线栅偏振器已经商品化，包括一种用微细铝线做的偏振器。它们从可见光波段到中红外波段都有高透射率。

虽然线栅特别在较高温度是有用的，我们在这里讲它却主要是为了教学目的而不是为了实用。但它所依据的原理，同样适用于别的更常用的二向色性偏振器。

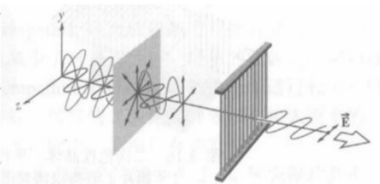
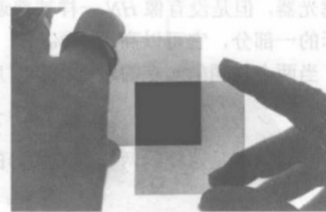


图 8.15 线栅偏振器。导线栅损耗掉电场的垂直分量（平行于导线的分量），让水平分量通过



一对正交的偏振片。每块偏振片都呈灰色，因为它吸收了大约一半的入射光

• 二向色性晶体 P422

双折射是某个特定频率的光通过二向色性晶体时产生的现象。

(Birefringence)

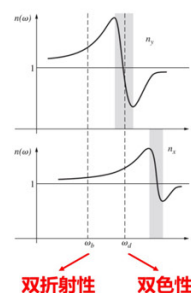
• 双折射：介质是光学各向异性的。微观上体现为电子束缚力的各向异性。



折射波速度 (or 等效地, 折射率) 由 $\vec{E}$ 的共振率及电子本征频率之差决定。(色散方程)

假定有一个晶体，入射光的频率在 ω_0 附近，落在晶体的 $n_y(\omega)$ 的吸收带内，如图 8.18 所示。这样照明的晶体对沿 y 方向偏振的光强烈吸收，对沿 x 方向偏振的光是透明的。很明显，一种双折射材料吸收一个偏振态的光，让另一个垂直的偏振态的光通过，事实上就是二向色性。此外，假定晶体有这样的对称性，使得 y 和 z 方向的束缚力相同，即这些弹簧有相同的自然频率和相同的损耗。那么 x 轴就定义了光轴的方向。只要一个晶体可以用一组这种有固定取

向的各向异性带电振子来表示，光轴实际上就是一个方向，而不仅仅是一条线。这个模型很适合二向色性晶体，因为如果光沿光轴传播 ($\vec{E}$ 在 yz 平面内)，就被强烈吸收；如果光垂直于光轴传播，它将以线偏振光射出。



• 双折射 P426-427, EX 8.34

单轴晶体分为两类：一类以冰洲石为代表， $v_e > v_o$ ， e 光的波面是扁椭球，这类晶体叫做负晶体。另一类以石英为代表， $v_o > v_e$ ， e 光的波面是长椭球，这类晶体叫做正晶体。

对于负晶体， $n_o > n_e$ ；对于正晶体， $n_o < n_e$ 。冰洲石和石英对于几条特征谱线的 n_o 、 n_e 值列于表 6-2 内。

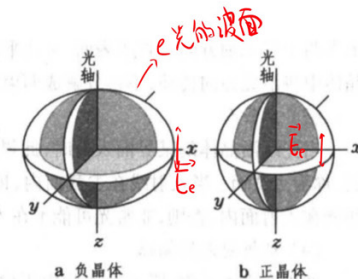
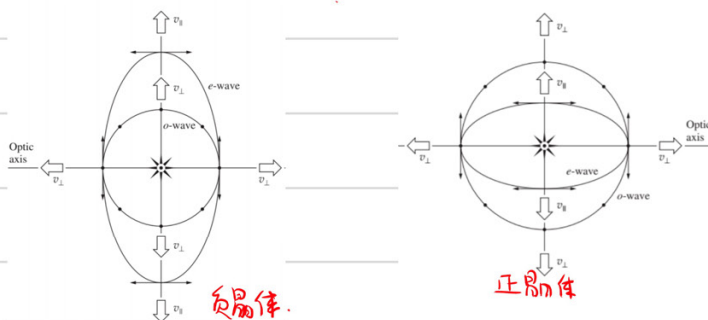


图 6-30 负晶体与正晶体



正晶体 0 光快
负晶体 0 光慢

双折射的电磁理论解释:

由 Maxwell Eqns: (非磁性介质)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J} \end{cases}$$

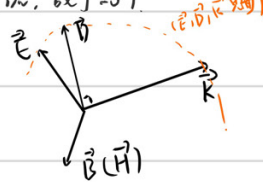
对于平面波, $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

于是 $\nabla \vec{B} = B_{0j} \partial_j e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = B_{0j} i k_j e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i \vec{k} \cdot \vec{B}$
由 ∇ 的矢量性, 此处 $\nabla \cong i \vec{k}$ (非体现微分性)

$$\nabla \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{B} = i \vec{k} \times \vec{B} = \mu \vec{\epsilon} i \omega \vec{E} = i \omega \mu \vec{D} \quad (\text{此处无电流, 故 } \vec{J} = 0)$$

$$\begin{cases} \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{k} \times \vec{B} = \omega \mu \vec{D} \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{B} \quad (\text{H}), \vec{D} \perp \vec{k} \quad (\text{V}) \\ \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \omega^2 \mu \vec{D} \stackrel{\text{恒等式}}{=} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{E} - k^2 \vec{E} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ 介质中 $\vec{D} \perp \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -\frac{1}{\omega^2 \mu} (k^2 \vec{E} - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{E}) \\ &= -\frac{k^2}{\omega^2 \mu} (\vec{E} - (\hat{k} \cdot \vec{E}) \hat{k}) \\ &= -\frac{k^2}{\omega^2 \mu} (\vec{E} - \vec{E}_{\parallel}) \\ &= -\frac{k^2}{\omega^2 \mu} \vec{E}_{\perp} \end{aligned}$$

在单轴晶体中, 选取合适的基矢, $\vec{D} = \epsilon_x \hat{x} + \epsilon_y \hat{y} + \epsilon_z \hat{z}$

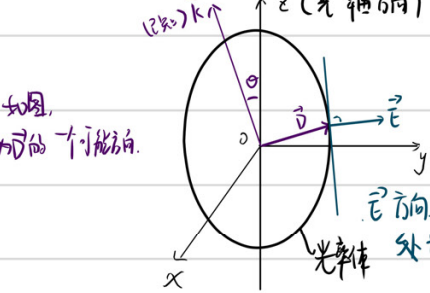
能量守恒, $U = \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z}$ 为定值 (由能量守恒)

$(\epsilon_i = n_i^2) \cdot \frac{D_x^2}{\epsilon_x U} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y U} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z U} = 1$, 为一椭圆方程. $\vec{D}$ 构成一椭圆.

一般情况下, $\vec{k}$ 为已知量 $\xrightarrow{\text{由 } \vec{D} \perp \vec{k} \text{ 求出 } \vec{D}} \text{ 找出 } \vec{D} \rightarrow \text{求出 } \vec{E} \rightarrow \text{得出 } \vec{S}$

光轴方向已知, 则已知 $\rightarrow$ 可以求得光在介质中的实际相速度.

如何求出 $\vec{E}$? $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$, i.e. $D_j = \epsilon_{ij} E_i$. 那么 $\vec{E} = \frac{D_x}{\epsilon_x} \hat{x} + \frac{D_y}{\epsilon_y} \hat{y} + \frac{D_z}{\epsilon_z} \hat{z}$



看这个光率体, 半轴轴长分别为 a_x, a_y, a_z .

则 $a_x \propto \sqrt{\epsilon_x}, a_y \propto \sqrt{\epsilon_y}, a_z \propto \sqrt{\epsilon_z}$.

$$\text{光率体曲面方程为 } F(x, y, z) = \frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} - U = 0.$$

$$\vec{D}$$
 上法向为 $\vec{DF} = 2(\frac{x}{\epsilon_x} \hat{x} + \frac{y}{\epsilon_y} \hat{y} + \frac{z}{\epsilon_z} \hat{z}) \parallel \vec{E}$.

$\vec{E}$ 方向正是光率体曲面外切面的法方向.

由 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, 当 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 不同向时, $\vec{S}$ 与 $\vec{k}$ 不同向. (能流与波矢/波面法向不同)

只要知道 $\vec{k}$ 与 $\hat{z}$ (光轴方向) 的夹角 θ , 便可算得该光在晶体中的相速度

由 Maxwell 第 4 条, $\mu \vec{D} = \frac{1}{\omega^2} [k^2 \vec{E} - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k}] \Rightarrow \mu \vec{\epsilon} \vec{E} = \frac{1}{\omega^2} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E})$, i.e. $\mu \epsilon_j E_j = \frac{1}{\omega^2} E_j - \frac{1}{\omega^2} k_j (\vec{k} \cdot \vec{E})$

$$\Rightarrow E_j = \frac{k_j (\vec{k} \cdot \vec{E})}{1 - \mu \epsilon_j v^2}, \quad \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = \sum_j E_j k_j = \sum_j \frac{k_j k_j (\vec{k} \cdot \vec{E})}{1 - \mu \epsilon_j v^2} \Rightarrow \frac{k_x^2}{1 - \mu \epsilon_x v^2} + \frac{k_y^2}{1 - \mu \epsilon_y v^2} + \frac{k_z^2}{1 - \mu \epsilon_z v^2} = 1 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{k_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{k_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{k_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0. \quad \text{取 } \hat{z} \text{ 为光轴方向, 则 } v_x = v_y = v_o, v_z = v_e.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2 - v_o^2} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{k_z^2}{v^2 - v_e^2} = \frac{\sin^2 \theta}{v^2 - v_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{v^2 - v_e^2} = 0 \Rightarrow (v^2 - v_o^2) \sin^2 \theta + (v^2 - v_e^2) \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow v^2 = v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta$$

波矢 $\vec{k}$ 与光轴 $\hat{z}$ 的夹角 θ . $v^2 = \frac{1}{\epsilon_j \mu}$, $\epsilon_j = \frac{1}{\mu v_j^2}$

ps: 对 O 光而言, $\mu \vec{D} = \mu \epsilon_z \vec{E} = \frac{1}{v_o^2} \vec{E} \Rightarrow v_o^2 = \frac{1}{\epsilon_z \mu} \Rightarrow v_o = v_o$

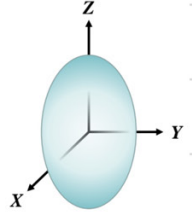
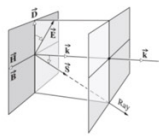
e 光不一定与光轴平行, e 光是除了 O 光外的一切分量

e 光一定程度上取决于分析时所取的 O 光方向. 分析截面一般取与光轴平行的平面.

O-光与e-光的理论分析

$$\vec{D} = \frac{1}{\omega^2 \mu} [k^2 \vec{E} - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k}] = \frac{n^2}{\mu c^2} E_{\perp} \vec{k}_{\perp} \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}$$

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} \text{ and } \vec{\epsilon} \text{ is diagonalized. } \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_x E_x \hat{x} + \epsilon_y E_y \hat{y} + \epsilon_z E_z \hat{z}$$



ellipsoid of wave normal (index ellipsoid) 折射率椭球.

$$U = U_e + U_m = \frac{\vec{k} \cdot \vec{S}}{\omega}$$

$$U = \vec{E} \cdot \vec{D} = \epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2 = \frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z}$$

$$X = \frac{D_x}{\sqrt{\epsilon_x}}, Y = \frac{D_y}{\sqrt{\epsilon_y}}, Z = \frac{D_z}{\sqrt{\epsilon_z}} \Rightarrow \frac{X^2}{\epsilon_x} + \frac{Y^2}{\epsilon_y} + \frac{Z^2}{\epsilon_z} = 1$$

关于 $\vec{D}$, $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$

$$\text{i.e. } \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

实际上, 每个特征值均对应一个光轴, 光轴可能有三个.

$$\text{对称化 } \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

其中 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ 为特征值

以单轴晶体为例, 若新系下 z 轴为光轴, 则 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, 在 x-y 面内所射之光线, 表现为 O 光.

$$\mu \vec{D} = \frac{k^2}{\omega^2} \vec{E} - \frac{\vec{k}}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \Rightarrow \mu \epsilon \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E})$$

$$E_j = \frac{k_j (\vec{k} \cdot \vec{E})}{1 - \mu \epsilon_j v^2} \quad D_j = \epsilon_j E_j \quad \vec{k} = k \hat{k}, \hat{k} = k'_x \hat{e}_x + k'_y \hat{e}_y + k'_z \hat{e}_z$$

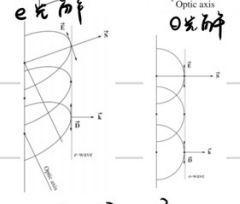
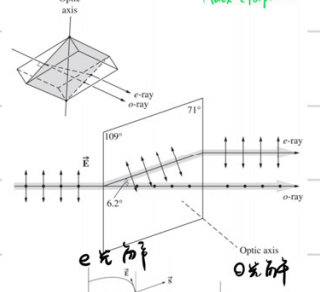
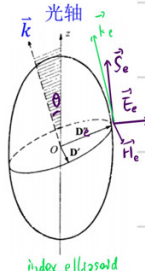
$$\frac{k_x'^2}{1 - \frac{v^2}{v_x^2}} + \frac{k_y'^2}{1 - \frac{v^2}{v_y^2}} + \frac{k_z'^2}{1 - \frac{v^2}{v_z^2}} = 1 = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2$$

$$\frac{k_x'^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{k_y'^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{k_z'^2}{v^2 - v_z^2} = 0$$

Set the optic axis is along the Z-axis, $v_x = v_y = v_o, v_z = v_e$

$$v = v_o, v^2 = v_o^2 (\cos \theta)^2 + v_e^2 (\sin \theta)^2$$

θ 为 $\vec{k}$ 与光轴的夹角.

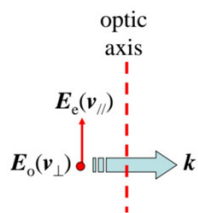
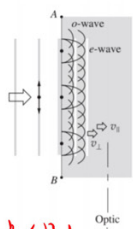


相位延迟器 - 波晶片 Wave Plates

$$n = d(n_o - n_e)$$

$$\Delta y = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_o - n_e) \quad \lambda \text{ 为真空中波长}$$

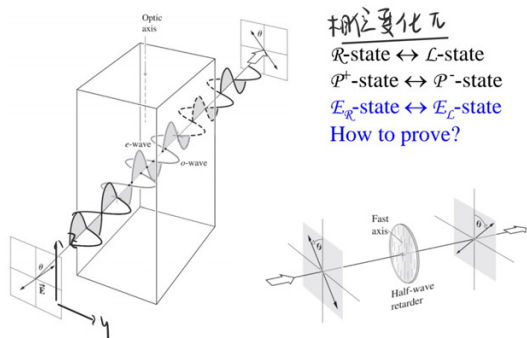
相位延迟器 - 波晶片 (Wave Plates)



- 负单轴延迟器:** $n_e < n_o \Rightarrow v_{||} > v_{\perp}$
(The optic axis is fast axis.) - 负单轴
正单轴延迟器: $n_e > n_o \Rightarrow v_{||} < v_{\perp}$
(The optic axis is slow axis.) - 正单轴

1/2波片 (Half-Wave Plates)

Half-wave plate: $d |n_o - n_e| = (m+1/2) \lambda_0$



相位变化 π
 $R\text{-state} \leftrightarrow L\text{-state}$
 $P\text{-state} \leftrightarrow P\text{-state}$
 $E_R\text{-state} \leftrightarrow E_L\text{-state}$
How to prove?

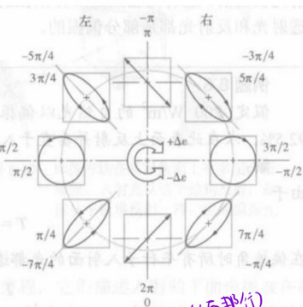


图 8.42 E_x 领先于 E_y 一个正相位或者落后于 E_y (负相位) ε 时的偏振态

(E_x 领先 E_y 为左旋)

例题 8.7

附图所示的一片方解石，光轴垂直于纸面（即 z 方向）。请说明，光通过晶体时发生了什么，并写出相差的表示式。

解：

对应于 o 波的 E_o 到处垂直于光轴，因为它“看到”一个各向同性的介质，所以 o 波是球形的。对应于 e 波的 E_e 到处平行于光轴，所以也以球形的子波扩张，方解石中 $v_o > v_e$ ，所以 e 波比 o 波跑得快。等价地， $n_o > n_e$ ，整个晶体片的光程差为 $d(n_o - n_e)$ ，因而

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_o - n_e)$$

对应于 (8.36) 式，要注意，只有 e 波的 E 场同时具有平行和垂直于光轴的两个分量时， e 波的传播才是椭圆形的。

$$P^+ \text{ state: } \vec{E} = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_e \cos(kx - \omega t) \hat{j}$$

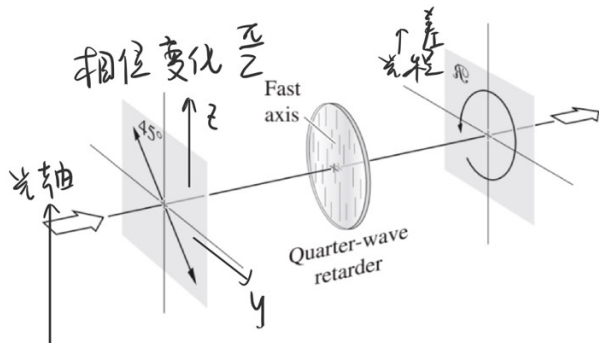
$$\frac{1}{2} \text{ 波片 } \hookrightarrow \vec{E}' = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} - E_e \cos(kx - \omega t) \hat{j} \leftarrow P^-$$

$$R \text{ state: } \vec{E} = E_e \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_o \sin(kx - \omega t) \hat{j}$$

$$\frac{1}{2} \text{ 波片 } \hookrightarrow \vec{E}' = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} - E_o \sin(kx - \omega t) \hat{j} \leftarrow L$$

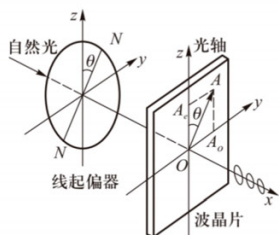
1/4波片 (Quarter-Wave Plates)

Quarter-wave plate: $d |n_o - n_e| = (m+1/4) \lambda_0$



- 1) $E \parallel$ optic axis
- 2) $E \perp$ optic axis
- 3) $\angle(E, \text{optic axis}) = 45^\circ$
 $P\text{-state} \leftrightarrow R\text{-} \text{ or } L\text{-states}$

通过相位延迟器的椭圆偏振



$$\delta = \frac{2\pi(n_o - n_e)d}{\lambda_0}$$

$$A_o = A \sin\theta, A_e = A \cos\theta$$

$$\vec{E} = A \sin\theta \cos(kx - \omega t) \hat{y} + A \cos\theta \cos(kx - \omega t + \delta) \hat{z}$$

$$= A_o \cos(kx - \omega t) \hat{y} + A_e \cos(kx - \omega t + \delta) \hat{z}$$

① $\vec{E} \parallel$ 光轴入射。

$$\vec{E}' = E_e \cos(kx - \omega t) \hat{i}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}' = E_e \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) \hat{i}$$

$$= -E_e \sin(kx - \omega t) \hat{i} \quad (\text{实际与原来波区别})$$

② $\vec{E} \perp$ 光轴入射。

$$\vec{E}' = \vec{E}$$

③ $\vec{E}$ 与光轴成 45° 入射

$$P \text{ state: } \vec{E} = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_o \cos(kx - \omega t) \hat{j}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}' = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_o \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) \hat{j}$$

$$\uparrow = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} - E_o \sin(kx - \omega t) \hat{j}$$

$L \text{ state}$

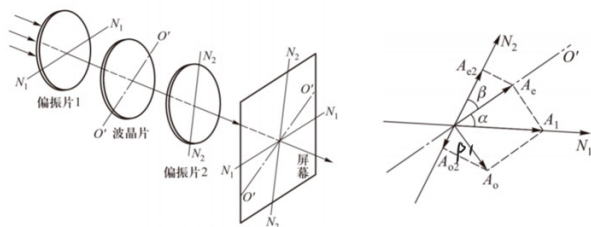
④ 椭圆偏振光入射。

$$\vec{E} = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_e \cos(kx - \omega t + \varepsilon) \hat{j}, \quad \varepsilon \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}' = E_o \cos(kx - \omega t) \hat{i} + E_e \cos(kx - \omega t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}) \hat{j}$$

(仍为椭圆偏，但“形状”改变)

通过相位延迟器后的干涉



$$I = A_1^2 \cos^2(\alpha + \beta) + A_1^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 2\beta \cdot \sin^2(\delta/2)$$

$$(1) N_1 \parallel N_2, \beta = -\alpha \quad I = A_1^2 - A_1^2 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2)$$

$$(2) N_1 \perp N_2, \alpha + \beta = \pi/2 \quad I = A_1^2 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2)$$

$$(1) \beta = -\alpha \text{ 时, } \sin 2\alpha = -\sin 2\beta \dots$$

$$(2) \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \sin 2\alpha = \sin 2\beta \dots$$

经过偏振片1后, 振幅为 A_1

经过波晶片后, 设波片引起 A_0 落后 δ 相位

$$\begin{aligned} A_e &= A_1 \cos \alpha \\ A_o &= A_1 \sin \alpha e^{i\delta} \end{aligned}$$

经过偏振片2后, $A_e = A_1 \cos \alpha \cos \beta$, $A_o = A_1 \sin \alpha \sin \beta e^{i\delta}$

$$\therefore A_2 = A_e - A_o = A_1 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta e^{i\delta})$$

$$\therefore I_2 = A_1^* A_2 = A_1^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \delta)$$

$$= A_1^2 \cos^2(\alpha + \beta) - A_1^2 (2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \delta)$$

$$= A_1^2 \cos^2(\alpha + \beta) - A_1^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \frac{1 - \cos \delta}{2}$$

$$= A_1^2 \cos^2(\alpha + \beta) - A_1^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad \square$$

旋光性 P454

1825年, 菲涅耳提出旋光性的简单唯象描述, 没有涉及旋光性的实际机制。由于入射的线偏振光可以用 $\mathcal{R}$ 态和 $\mathcal{L}$ 态的叠加来表示; 他提出, 这两种圆偏振光的传播速度不相同。旋光性材料具有圆双折射, 即有两个折射率, 对 $\mathcal{R}$ 态的为 n_R , 对 $\mathcal{L}$ 态的为 n_L , 在通过旋光性样品时这两个圆偏振波的相位错开, 所以合成的线偏振波的偏振面旋转。回到描写沿 z 方向传播的单色右圆偏振光和左圆偏振光的 (8.8) 式和 (8.9) 式, 我们可以解析地看到情况是如何发生的。在 (8.10) 式中我们看到这两个波之和确实是线偏振的。为了消去 (8.10) 式振幅中 2 这个因子, 我们把表示式稍为改变一下, 用

$$\vec{E}_{\mathcal{R}} = \frac{E_0}{2} [\hat{i} \cos(k_{\mathcal{R}}z - \omega t) + \hat{j} \sin(k_{\mathcal{R}}z - \omega t)] \quad (8.42a)$$

$$\vec{E}_{\mathcal{L}} = \frac{E_0}{2} [\hat{i} \cos(k_{\mathcal{L}}z - \omega t) - \hat{j} \sin(k_{\mathcal{L}}z - \omega t)] \quad (8.42b)$$

表示右圆和左圆分量波。由于 ω 是常数, $k_{\mathcal{R}} = k_0 n_{\mathcal{R}}$ 和 $k_{\mathcal{L}} = k_0 n_{\mathcal{L}}$ 。合成的扰动为 $\vec{E} = \vec{E}_{\mathcal{R}} + \vec{E}_{\mathcal{L}}$, 作一些三角运算后, 变为

$$\vec{E} = E_0 \cos[(k_{\mathcal{R}} + k_{\mathcal{L}})z/2 - \omega t] [\hat{i} \cos(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2 + \hat{j} \sin(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2] \quad (8.43)$$

注意光路上任何一点的两个分量对时间有相同的依赖关系, 因此是同相的。这意味着沿 z 轴的任何地方, 合成波是线偏振波 (图 8.58), 但偏振方向则是 z 的函数。若 $n_{\mathcal{R}} > n_{\mathcal{L}}$, 或等价地 $k_{\mathcal{R}} > k_{\mathcal{L}}$, 将逆时针旋转; 而当 $k_{\mathcal{L}} > k_{\mathcal{R}}$, 旋转是顺时针的 (朝光源方向看)。习惯上当 $\vec{E}$ 顺时针旋转时, 定义转过的角度 β 为正。符号约定之后, 从 (8.43) 式得到, 在点 z 的场相对于原来的取向旋转了 $\beta = -(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2$ 。如果介质厚度为 d , 振动面旋转的角度为

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_{\mathcal{L}} - n_{\mathcal{R}}) \quad (8.45)$$

其中, $n_{\mathcal{L}} > n_{\mathcal{R}}$ 时为右旋, $n_{\mathcal{R}} > n_{\mathcal{L}}$ 为左旋 (图 8.59)。

$$\text{Def 旋光率} \equiv \frac{\beta}{d} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_L - n_R)$$

• 生物有机分子的右旋性 P458

• 光调制器 相位调制是光通信的基本原理。

电压调制 $\sim$ 相位。

声光调制 $\sim$ 光数 $\sim$ 频率

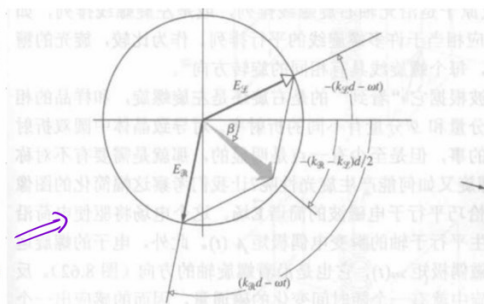


图 8.59 在 $z=d$ 处 $\mathcal{R}$ 态和 $\mathcal{L}$ 态的叠加 ($k_{\mathcal{L}} > k_{\mathcal{R}}$, $\lambda_{\mathcal{L}} < \lambda_{\mathcal{R}}$, $v_{\mathcal{L}} < v_{\mathcal{R}}$)

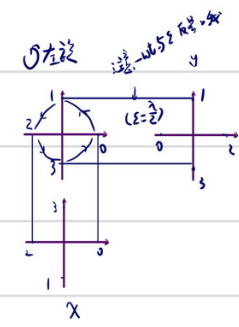
The Jones Matrices 缺点: 不能描述非偏振光.

Def: $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{bmatrix}$ $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = 0$ 则称 1,2 偏振态正交.

P state-X: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ P state-Y: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ P state-45°: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ P state-135°: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

R state: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ L state: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

if & Review: L state, $\vec{E} = \begin{bmatrix} E e^{i(kz - \omega t)} \\ E e^{i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} \end{bmatrix}$ E_x 关于 ωt 领先 $\frac{\pi}{2}$ 为左旋
 $\Rightarrow \|\vec{E}\| = 1, \vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ 极化 $= e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ 其余同理.



Jones Matrices & Mueller Matrices

Linear optical element	Jones matrix	Mueller matrix	Linear optical element	Jones matrix	Mueller matrix
Horizontal linear polarizer $\leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Quarter-wave plate, fast axis vertical $\frac{1}{4}$ 波片	$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Vertical linear polarizer $\updownarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Quarter-wave plate, fast axis horizontal	$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
Linear polarizer at +45° $\nearrow$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Homogeneous circular polarizer right $\odot$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Linear polarizer at -45° $\nwarrow$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Homogeneous circular polarizer left $\ominus$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

快轴而滞后(空间上)
 $\frac{1}{4}$ 波片, 快轴为轴.
 则 y 方向比 x 方向滞后 $\frac{\pi}{2}$.
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} e^{i\phi}$
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} e^{i\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\phi}$
 $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=0 \\ d=-i \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Example 1:

Show that a circular-polarized state can be composed by two independent plane-polarized states; and a plane-polarized state can be composed by two independent circular-polarized states.
 (Notice that this result cannot be obtained by using Stoke's parameters, why?) Not complete.

R-state: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ L state similarly.
 Plane polarized state: $\vec{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$
 assume $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{b}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
 Sol: $a = \frac{1}{2} e^{i\theta}, b = \frac{1}{2} e^{-i\theta}$ i.e. a,b exist. $\square$.

全右旋片:
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$
 $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \\ d = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & e^{i\phi} \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 why: 取 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ 是 $\frac{1}{4}$ 波片上的结果.

Example 2:

P-state at 45° with respect to the X-axis, passing through a quarter-wave plate with a vertical (Y-axis) fast axis, will convert to R-state. (Use Jones & Mueller Matrices)

P-state, 45° ~ X: $\vec{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\frac{1}{4} \lambda$ plate, Y fast axis: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ } $M \vec{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \sim R\text{-state}$

General Cases of Jones Matrix.

1. A linear polarizer with transmission axis at θ with X-axis.

Method: Coordinates transformation

$\vec{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ $\vec{E}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{E} = U \vec{E}' U^{-1}$ $\Rightarrow U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Jones Matrix in $\{x', y'\}$

$J = U^{-1} J' U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

$\vec{J} = U^{-1} \tilde{J} U \vec{x}$ 这样理解咯

2. The fast-axis is along $\hat{x}$ having a relative phase retardation of δ . i.e. $\frac{2\pi d(n_s - n_f)}{\lambda_0} = \delta$.



$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\delta} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\delta} e^{i\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = e^{i\delta} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

3. The fast axis at θ wrt the x -axis has a relative phase retardation of δ with respect to.



$$J = U \tilde{J} U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta e^{i\delta} & \frac{1}{2}\sin 2\theta(1 - e^{i\delta}) \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta(1 - e^{i\delta}) & \sin^2\theta + \cos^2\theta e^{i\delta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \cos^2\theta e^{-i\frac{\delta}{2}} + \sin^2\theta e^{i\frac{\delta}{2}} & -i\sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ -i\sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} & \sin^2\theta e^{-i\frac{\delta}{2}} + \cos^2\theta e^{i\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix}$$

Assignment

8.28* Given that 300 W/m^2 of randomly polarized light is incident normally on a stack of ideal linear polarizers that are positioned one behind the other with the transmission axis of the first vertical, the second at 30° , the third at 60° , and the fourth at 90° . How much light emerges?

$$I = I_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2 30^\circ \cdot \cos^2 (60^\circ - 30^\circ) \cdot \cos^2 (90^\circ - 60^\circ) = \frac{300}{16} = 18.75 \text{ W/m}^2$$

(尽管这里 $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ 的初始值, 但应该差不多, 精确用吧)

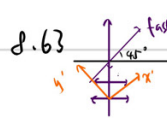
8.53. opt. axis for quartz. $n_o = 1.544$, $n_e = 1.5534$

$$\begin{cases} c = \lambda_0 v \\ v = \lambda v \Rightarrow \frac{c}{v} = n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_o = \frac{\lambda_0}{n_o} \\ \lambda_e = \frac{\lambda_0}{n_e} \end{cases}$$

8.56 let the natural light go through one of the device, and measure the irradiance of the output light.

$$\begin{cases} I_{out} = I_{in} : \text{quarter-wave plate, another is a linear polarizer} \\ I_{out} = \frac{1}{2} I_{in} : \text{linear polarizer, another is a quarter-wave plate} \end{cases}$$

8.63



$$\vec{E}_k = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} - E e^{i(kx - \omega t)} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{out} = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} - E e^{i(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})} \hat{y} = E e^{i(kx - \omega t)} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \sim \text{R-state}$$

8.93 (a) $\vec{E}_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$. $\vec{E}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos^2\theta + \sin\theta\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta\sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Obviously, it's a linear polarizer with transmission at θ wrt x -axis.

(c) $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

i.e., a beam of linear polarization light at the same direction of the polarizer is invariant through that linear polarizer.

8.94. $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ is the Jones Matrix of a $\frac{\pi}{4}$ plate.

with the fast axis at -45° wrt the x axis.

$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ is the Jones Matrix of a $\frac{\pi}{4}$ plate.

with the fast axis at $+45^\circ$ wrt the x axis.

pf: consider such a plate the fast axis of which at θ wrt $\hat{x}$ with a relative phase retardation of δ .

We have already know that $\tilde{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$ for a plate with the fast axis along $\hat{x}$

with a relative phase retardation of δ .

With the method of coordinate transformation,

$$J = U \tilde{J} U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta e^{i\delta} & \frac{1}{2}\sin 2\theta(1 - e^{i\delta}) \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta(1 - e^{i\delta}) & \sin^2\theta + \cos^2\theta e^{i\delta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \cos^2\theta e^{-i\frac{\delta}{2}} + \sin^2\theta e^{i\frac{\delta}{2}} & -i\sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ -i\sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} & \sin^2\theta e^{-i\frac{\delta}{2}} + \cos^2\theta e^{i\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix}$$

Substitutes in $\theta = -45^\circ$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} & +i\frac{\pi}{2} \\ +i\frac{\pi}{2} & \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = A_1$

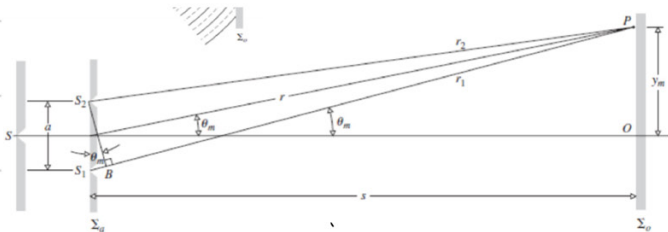
$\theta = 45^\circ$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = A_2$. $\square$

干涉 Ken's it.

1. 两同向偏振光干涉的描述: $E_1 = E_{10} e^{ikx_1}$, $E_2 = E_{20} e^{ikx_2}$
 $I = (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos k\Delta x$, $\Delta x \equiv x_1 - x_2$

2. Analysis of Young's experiment, Uncertainty Principle.

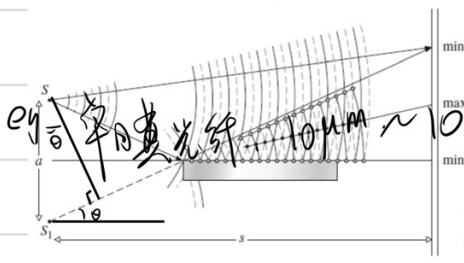
Uncertainty principle: $\Delta x \Delta p_x \sim h$, $\theta \approx \Delta p_x / p \Rightarrow a \theta \approx h \Rightarrow \theta \approx \frac{h}{a p}$, $\Delta y = s \theta = \frac{s}{a} \lambda$.



(单光子干涉只与光程差有关) $y_m = \frac{s}{a} m \lambda$

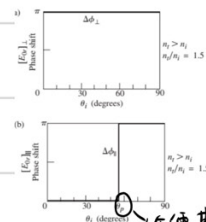
光强 $I(y) = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta x = 4I_0 \cos^2(\frac{1}{2} \Delta x) = 4I_0 \cos^2(\frac{y a}{2s \lambda})$

Extension: Lloyd's mirror



光程差 $\delta = k(r_1 - r_2) \pm \pi$ (半波损失). recall: $\delta = k a \sin \theta \pm \pi$

$I(y) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a y}{\lambda s}$
 $\lambda \sim 10^{-6} \text{ m}$
 $\frac{\pi a y}{\lambda s} \sim 10^{-4}$

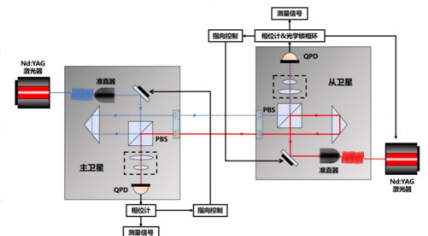


布儒斯特角.

"光子自己和自己干涉!" (不过似乎也可以和别的光干涉)

波粒二象性: 既不是波, 也不是粒子.

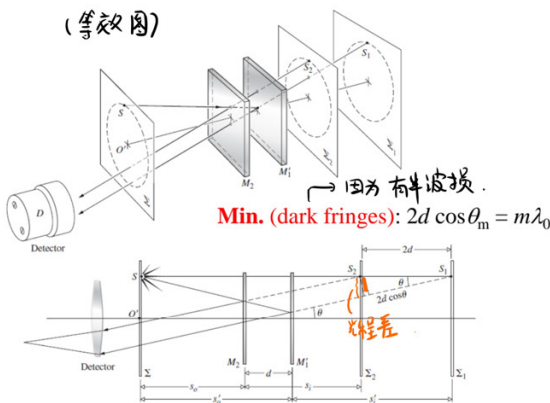
Transponder laser interferometry for gravitational-wave detection and next-generation global gravity measurement



中山大学学报 (自然科学版) 第60卷, 第1-2期, 2021年1月

3. Michelson's interferometer & displacement measurement

(等效图)



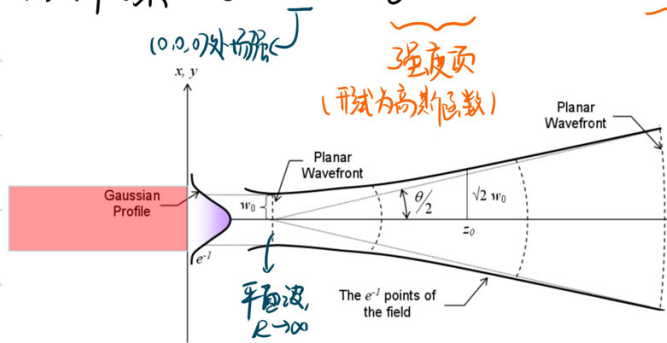
Min. (dark fringes): $2d \cos \theta_m = m \lambda_0$

Min: $2d \cos \theta_m = m \lambda$

$m \lambda$ 固定, 则 $d \downarrow \Rightarrow \cos \theta_m \uparrow \Rightarrow \theta_m \downarrow$ 各纹向中心收缩

正入射时, 1个各纹变化 $\sim d$ 变化 $\frac{\lambda}{2}$

3. 高斯光束: $E \propto E_0 e^{ikz} e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2R}} e^{-i \tan^{-1}(\frac{z}{z_R})}$



平面波面

w_0 : $z=0$ 处的光束半径 (光束半径)

w : z 处的光束半径

k : 波矢

R : 波前的曲率半径

z_R : Rayleigh range of Gaussian beam.

① 形式猜测: 先考虑球面波的傍轴近似.

$$z^2 \gg x^2 + y^2 \text{ 故 } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

$$\text{球面波 } E_s \propto \frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{e^{ikz} e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}}}{z + \frac{x^2+y^2}{2z}} \approx \frac{1}{2} e^{ikz} e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}} = e^{ikz} \frac{e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}}}{z} \equiv u(z) e^{ikz}$$

故猜想高斯光束也有类似 $E_0 u(z) e^{ikz}$ 的形式.

平面波项 $\equiv u(z)$

② key: 单个 z 不足以描述高斯光束的特征, 须引入 $q = q_0 + z$ 来描述, q_0 为一个纯虚数. 假设 $\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2}$.

$$\text{由假设, } \frac{1}{q_0 + z} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } R \rightarrow \infty, \text{ 有 } q_0 = \frac{\lambda w_0^2}{i\lambda} \Rightarrow q = \frac{\lambda w_0^2}{i\lambda} + z \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{z - \frac{i\lambda w_0^2}{\lambda}} = \frac{z + \frac{i\lambda w_0^2}{\lambda}}{z^2 + \frac{\lambda^2 w_0^4}{\lambda^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{z}{z^2 + \frac{\lambda^2 w_0^4}{\lambda^2}} \\ i \frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{\frac{i\lambda w_0^2}{\lambda}}{z^2 + \frac{\lambda^2 w_0^4}{\lambda^2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} R = z + \frac{z_R^2}{z} \\ w^2 = \frac{\lambda^2 z^2 + w_0^4}{\lambda^2} = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right) \end{cases}$$

Def $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$
Rayleigh range

决定多远后趋于球面波.

eg. 红外激光, $\lambda \sim 10^{-6} \text{ m}$, $w_0 \sim 0.3 \text{ m}$,
约 300km 后趋于球面波.

ps: 发散角, $\theta \sim \tan \theta \sim \frac{w}{z} \sim \frac{w_0}{z_R}$

③ 估计高斯光束的场强: $E \propto E_0 e^{ikz} u(q)$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{1}{|q|} e^{i \text{Arg}(1/q)} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w^4}} e^{i \tan^{-1}(\frac{\lambda R}{\pi w^2})}$$

$$u(q) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w^4}} e^{i \tan^{-1}(\frac{\lambda R}{\pi w^2})} e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}$$

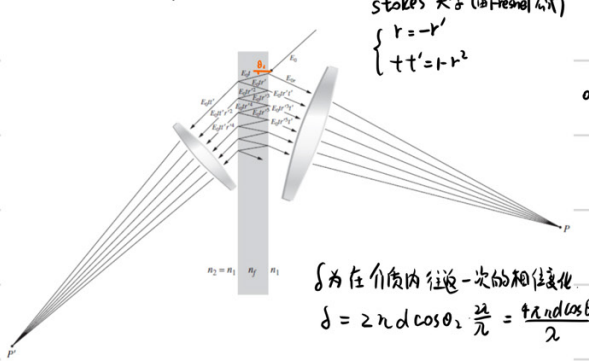
$$\hookrightarrow e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2\pi w^2}} \text{ 中 } \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \text{当 } \frac{1}{R^2} \ll \frac{\lambda^2}{\pi^2 w^4} \text{ 时,}$$

$$E \propto \frac{\lambda}{\pi w^2} e^{i \tan^{-1}(\frac{\lambda R}{\pi w^2})} e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} e^{ikz} \quad \square$$



4. 多光束干涉



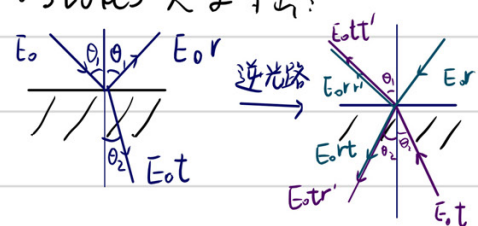
Assumption: 介质不吸收; $n_1 = n_2$; 入射光平行.

反射光: $E_{1r} = E_0 r e^{-i\omega t}$
 $E_{2r} = E_0 t r' e^{i\delta} e^{-i\omega t}$
 $E_{3r} = E_0 t r' t' e^{2i\delta} e^{-i\omega t}$
 $\Rightarrow E_r = \sum_{k=1}^{\infty} E_{kr} = E_0 e^{-i\omega t} [r + t r' e^{i\delta} + t^2 r'^2 e^{2i\delta} + \dots]$
 $= E_0 e^{-i\omega t} [r + \frac{r' t t' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{2i\delta}}]$
 $= E_0 e^{-i\omega t} [r - \frac{r(1-r^2)e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{2i\delta}}] = E_0 e^{-i\omega t} r [1 - \frac{(1-r^2)(e^{i\delta} - 1)}{1 - r'^2 e^{2i\delta}}]$

$\Rightarrow$ if r is real, then:

$$I_r = E_r E_r^* = E_0^2 r^2 \left[1 + \frac{2(1-r^2)(\cos \delta - 1) + (1-r^2)^2}{1 - r'^2 - 2r'^2 \cos \delta} \right] = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{1 - r'^2 - 2r'^2 \cos \delta}$$

Stokes 关系导出:



$$\begin{cases} E_0 = E_{ot'} + E_{or'} \\ E_{ot} + E_{or} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t t' + r r' = 0 \sim t t' = -r^2 \\ r = -r' \end{cases}$$

透射光: $E_{1t} = E_0 t t' e^{-i\omega t}$
 $E_{2t} = E_0 t r'^2 t' e^{-i\omega t} e^{i\delta}$
 $E_{3t} = E_0 t r'^4 t' e^{-i\omega t} e^{2i\delta}$

$$E_t = \sum_{k=1}^{\infty} E_{kt} = E_0 t t' e^{-i\omega t} [1 + r'^2 e^{i\delta} + \dots]$$

$$= E_0 e^{-i\omega t} \frac{1 - r^2}{1 - r'^2 e^{i\delta}}$$

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{1 - r'^2 - 2r'^2 \cos \delta} = I_i \frac{4r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = I_i \frac{(\frac{2r}{1-r^2})^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + (\frac{2r}{1-r^2})^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$I_t = I_i \frac{(1-r^2)^2}{1 - r'^2 - 2r'^2 \cos \delta} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = I_i \frac{1}{1 + (\frac{2r}{1-r^2})^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$\Rightarrow$ if r is real,

$$I_t = E_t E_t^* = E_0^2 \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2 e^{i\delta})(1-r^2 e^{-i\delta})} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{1 - r'^2 - 2r'^2 \cos \delta}$$

$\Rightarrow I_r + I_t = I_i$

Special case: ① $\delta = 2m\pi, I_t = I_i, I_r = 0$.

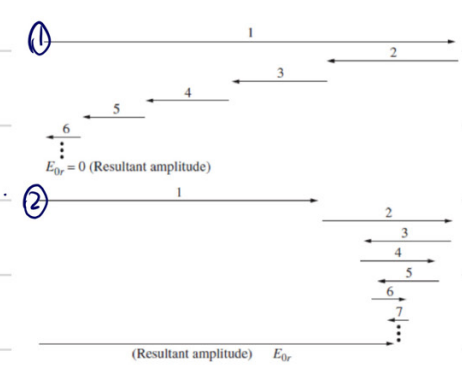
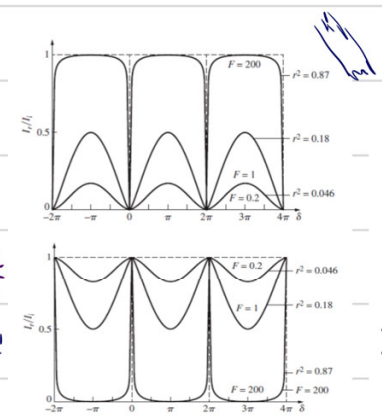
② $\delta = 2(m+1)\pi, I_t = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} I_i, I_r = \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} I_i$

Coefficient of Finesse

Def: $F \equiv (\frac{2r}{1-r^2})^2$

$$\begin{cases} \frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}} \\ \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}} \end{cases}$$

$\delta = \frac{4\pi n d \cos \theta_2}{\lambda}$
 $\delta = 2\pi m = \frac{4\pi n d}{\lambda} \Rightarrow n d = \frac{m \lambda}{2}$
 Airy func.



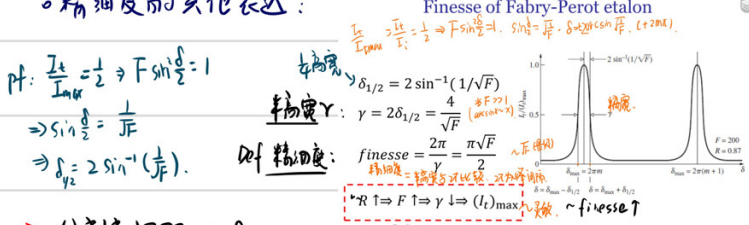
Fabry-Perot interferometer

- Enclosed gap d is ranging from mm ~ km.
- Used as a laser resonant cavity, also for laser frequency stabilization, phase locking, spectroscopy, ... etc.

F-P干涉仪应用:

- 直接测位移 $\delta = \frac{4\pi n d}{\lambda}$ (正负)
- 光谱仪 (光谱分辨率)

精细度的其他表达:



波长/频率表达:

$$\delta = \frac{4\pi n d}{\lambda} = \frac{4\pi n d f}{c}, \quad \delta \sim \frac{4}{f} \sim \frac{4\pi n d}{\lambda^2} \Delta \lambda \sim \frac{4\pi n d}{c} \Delta f$$

$$\Rightarrow (\Delta \lambda)_{\min} = \frac{\lambda^2}{4\pi n d F}, \quad (\Delta f)_{\min} = \frac{c}{4\pi n d F}$$

Free spectral range: 相邻两对应的波/频率. $(\Delta \lambda)_{fsr} \sim \frac{\lambda^2}{2nd}, \quad (\Delta f)_{fsr} \sim \frac{c}{2nd}$

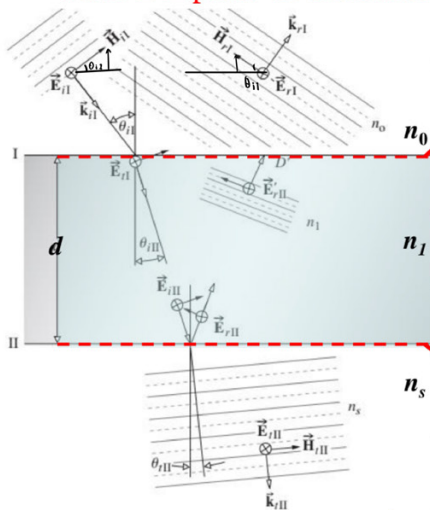
$$\Rightarrow finesse = \frac{2\pi}{(\Delta \lambda)_{\min}} = \frac{(\Delta \lambda)_{fsr}}{(\Delta \lambda)_{\min}} = \frac{(\Delta f)_{fsr}}{(\Delta f)_{\min}}$$

分辨率极限: $(\Delta \lambda)_{\min} = \gamma$. 分辨率, Chromatic resolving power: $R \equiv \frac{\lambda_0}{(\Delta \lambda)_{\min}} = \frac{f}{(\Delta f)_{\min}} = \frac{f}{\frac{c}{2nd}} = \frac{2nd}{\lambda_0} \cdot finesse$

5. 薄膜の矩阵

(Films)

When $E \perp$ plane-of-incidence



(-) $E \perp$ 入射面

条件: 界面上 = 界面下.

$$\begin{cases} E_1 \equiv E_{t1} + E_{r1} = E_{i1} + E_{r1} & ① \\ H_1 \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{t1} - E_{r1}) n_1 \cos \theta_{i1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{i1} - E_{r1}) n_0 \cos \theta_{i1} & ② \end{cases}$$

(电磁场界面BC. $H_{1t} = H_{0t}$)

$$\begin{cases} E_{t1} \equiv E_{i1} + E_{r1} = E_{t1} & ③ \\ H_{t1} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{i1} - E_{r1}) n_1 \cos \theta_{i1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{t1} n_s \cos \theta_{t1} & ④ \end{cases}$$

if $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{i1} \equiv Y_1$

• 开工!

if $h = \frac{n_1 d}{\cos \theta_{i1}}$, then $E_{r1} = E_{r1} e^{ik_0 h}$, $E_{t1} = E_{t1} e^{ik_0 h}$ ⑤

由①, ④, 得 $\begin{cases} E_{i1} = \frac{1}{2} (E_{t1} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{H_{t1}}{n_1 \cos \theta_{i1}}) \\ E_{r1} = \frac{1}{2} (E_{t1} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{H_{t1}}{n_1 \cos \theta_{i1}}) \end{cases}$ ⑥

由④, 把⑥代入①得: $E_1 = E_{i1} e^{-ik_0 h} + E_{r1} e^{ik_0 h}$

$$= \frac{1}{2} [E_{t1} (e^{-ik_0 h} + e^{ik_0 h}) + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{H_{t1}}{n_1 \cos \theta_{i1}} (e^{-ik_0 h} - e^{ik_0 h})]$$

$$= E_{t1} \cos k_0 h - i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{H_{t1}}{n_1 \cos \theta_{i1}} \sin k_0 h = \cos k_0 h E_{t1} - i \frac{1}{Y_1} \cos k_0 h H_{t1}$$

if $\lambda \otimes$ 得: $H_1 = i Y_1 \sin k_0 h E_{t1} + \cos k_0 h H_{t1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & -i \sin k_0 h / Y_1 \\ -i Y_1 \sin k_0 h & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t1} \\ H_{t1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_{t1} \\ H_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & i Y_1 \sin k_0 h \\ i \sin k_0 h / Y_1 & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \quad (1)'$$

(=) $E \parallel$ 入射面

$$\begin{cases} E_1 = (E_{i1} - E_{r1}) \cos \theta_{i1} = (E_{t1} - E_{r1}) \cos \theta_{i1} \\ H_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_0 (E_{i1} + E_{r1}) \\ E_{t1} = (E_{i1} - E_{r1}) \cos \theta_{i1} = E_{t1} \cos \theta_{t1} \\ H_{t1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 (E_{i1} + E_{r1}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_s E_{t1} \end{cases}$$

同理, $\begin{bmatrix} E_{t1} \\ H_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & i \sin k_0 h / Y_1 \\ i Y_1 \sin k_0 h & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix}$ $Y_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{n_1}{\cos \theta_{i1}}$ (2)'

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & -i \sin k_0 h / Y_1 \\ i \sin k_0 h / Y_1 & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t1} \\ H_{t1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

• 不论对于 $E \parallel$ 或 $E \perp$ 入射面,

总可通过 $\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = M_1 M_2 \dots M_p \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}$

来计算通过 p 层膜后的 $\begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}$

if $M \equiv M_1 M_2 \dots M_p \equiv \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$,

记 $Y_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_0$, $Y_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1$, $Y_s = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_s$

(此外仅考虑正入射)

对多层膜, 有 $\begin{bmatrix} E_{t1} + E_{r1} \\ (E_{i1} - E_{r1}) Y_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_{t1} \\ E_{t1} Y_s \end{bmatrix}$. Def $r \equiv \frac{E_r}{E_{i1}}$, $t \equiv \frac{E_{t1}}{E_{i1}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_s m_{12} - m_{21} - \gamma_s m_{22}}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_s m_{12} + m_{21} + \gamma_s m_{22}} \\ t = \frac{2 \gamma_0}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_s m_{12} + m_{21} + \gamma_s m_{22}} \end{cases}$$

正入射时, $\theta_{i1} = \theta_{t1} = \theta_{t2} = 0$. 有:

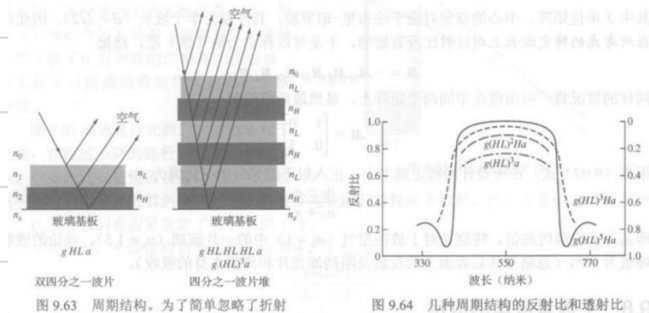
$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{n_1(n_0 - n_s) \cos k_0 h - i(n_0 n_s - n_1^2) \sin k_0 h}{n_1(n_0 + n_s) \cos k_0 h - i(n_0 n_s + n_1^2) \sin k_0 h} \\ R_1 &= \frac{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s - n_1^2)^2 \sin^2 k_0 h}{n_1^2(n_0 + n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s + n_1^2)^2 \sin^2 k_0 h} \end{aligned}$$

$E \perp$ Special case: 当 $k_0 h = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2n_1 n_0}{\lambda_0} d = \frac{\pi}{2}$, $d = \frac{\lambda_0}{4 n_1} = \frac{\lambda_1}{4}$. (介电常数中的波长)

此时 $R_1 = \frac{(n_1 n_0 - n_s)^2}{(n_1 n_0 + n_s)^2}$. 若 $n_1^2 = n_0 n_s$, 则 $R_1 = 0 \sim$ 抗反射膜.

$k_0 h = \frac{\pi}{2}$ 的两层膜: $M = \begin{bmatrix} 0 & -i Y_1 \\ -i Y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i Y_2 \\ -i Y_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_1/n_1 & 0 \\ 0 & -n_1/n_2 \end{bmatrix}$, $R_2 = \frac{(n_1^2 n_0 - n_s)^2}{(n_1^2 n_0 + n_s)^2}$. $\frac{n_1^2}{n_1^2} = \frac{n_s}{n_0} \Rightarrow R_1 = 0$.

• 多周期系统 (Hecht 译本 P519).



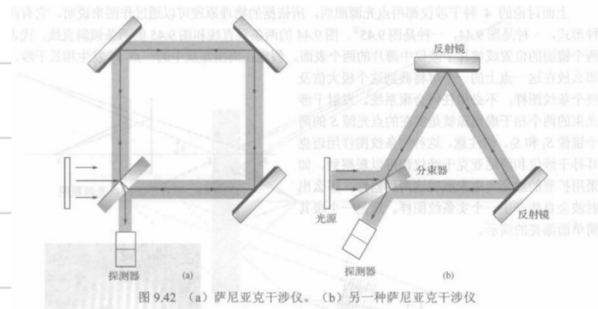
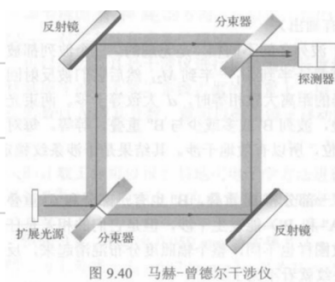
6. 干涉仪. (Hecht 译本 P519 + P543 +)

• 原子干涉仪

• 测相干长度

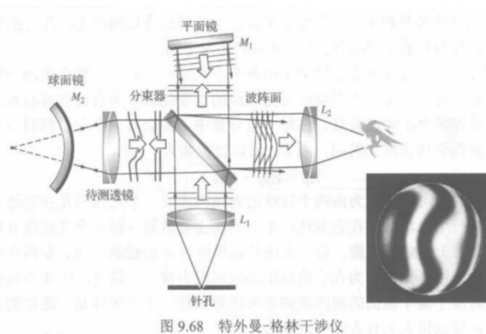
• 马赫-曾德尔干涉仪

可放进物体观察光干涉...



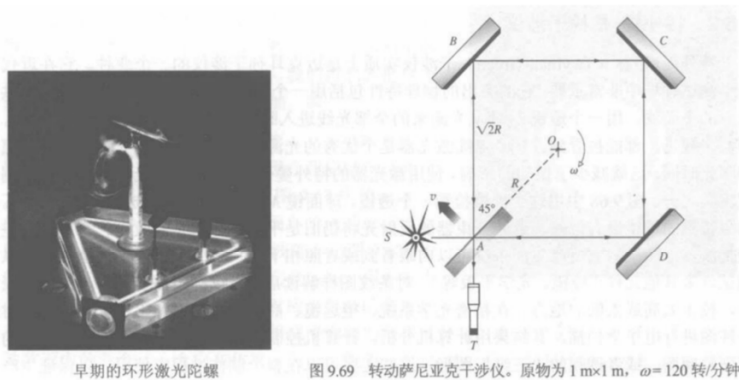
• 萨尼亚克干涉仪. ~ 光陀螺, 相对论效应

• Twyman-Green 干涉仪. (迈...的变种).



• 转动萨尼亚克干涉仪. ~ 测量转速

此: 雷达干涉测量束.

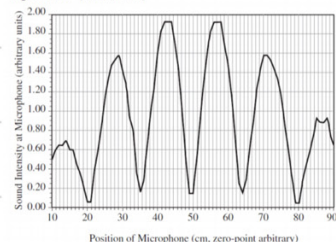


Summary

- Condition of interference: polarization & coherence
- Wavefront-splitting interferometry: Young's double slits, Lloyd's mirror
- Amplitude-splitting interferometry
 - Double-beam interference:
 - Equal-inclination & equal-thickness
 - Michelson, Mach-Zehnder, Sagnac interferometers
 - Multiple-beam interference:
 - F-P cavity (r , t , Airy function, finesse, FSR)
 - Characteristic matrix of optical films

9.5* Figure P9.5 shows an output pattern that was measured by a tiny microphone when two small piezo-loudspeakers separated by 15 cm were pointed toward the microphone at a distance of 1.5 m away. Given that the speed of sound at 20°C is 343 m/s, determine the approximate frequency at which the speakers were driven. Discuss the nature of the pattern and explain why it has a central minimum.

Figure P9.5 (Data from CENG)



9.11* Red plane waves from a He-Ne laser ($\lambda_0 = 632.8$ nm) in air impinge on two parallel slits in an opaque screen. A fringe pattern forms on a distant wall, and we see the fourth bright band 1.0° above the central axis. Calculate the separation between the slits.

9.19* Plane waves of monochromatic light impinge at an angle θ_i on a screen containing two narrow slits separated by a distance a . Derive an equation for the angle measured from the central axis that locates the m th maximum.

9.37* A thin uniform layer of water ($n = 1.33$) 250 nm thick exists on top of a sheet of clear plastic ($n = 1.59$). At what incident angle will the water strongly reflect blue light ($\lambda_0 = 460$ nm)? [Hint: Modify Eq. (9.34).]

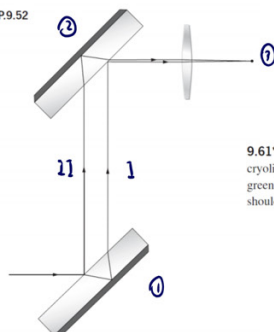
9.46* Examining photos of Newton's rings we observe that fringes at large values of m seem to be nearly equally spaced. To see that analytically, show that

$$\frac{(x_{m+1} - x_m)}{(x_m + 2 - x_{m+1})} \approx 1 + \frac{1}{2m}$$

When m is large, the spacings between consecutive fringes are approximately equal.

9.52* A form of the Jamin Interferometer is illustrated in Fig. P9.52. How does it work? To what use might it be put?

Figure P9.52



9.61* A glass camera lens with an index of 1.58 is to be coated with a cryolite film ($n = 1.30$) to decrease the reflection of normally incident green light ($\lambda_0 = 500$ nm). What is the thickness of the film, which should be deposited on the lens?

$$\begin{aligned} 9.4b. \quad \lambda_m &= \left(\frac{m+1}{m} \right) \frac{\lambda_0}{n_f} R^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\lambda_{m+1} - \lambda_m}{\lambda_{m+1} + \lambda_m} &= \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} = 1 + \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{1}{2\sqrt{m}}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{m}}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}} \approx 1 + \frac{1}{2\sqrt{m}} \end{aligned}$$

9.12. 光线经①、②反射到③。
在慢光介质中，光程 $r_2 = r_1$ ，在③处观察到亮纹。
但在非慢光介质/空气中，光程可能会发生变化，使③处观察到干涉条纹。
可以用于测量加速度/引力场分布等。

9.61 To decrease reflection, ($n_1 = 1.3$, $n_2 = 1.58$)
thickness of the film: $d = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{500}{4 \times 1.3} = 96.15 \times 10^{-9} \text{ m} = 96.15 \text{ nm}$

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{1-R} \right]^2 \text{ Airy}(\theta), \text{ Airy}(\theta) = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

$$\text{finesse} = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}, R \uparrow \Rightarrow F \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow \Rightarrow (I_t)_{\max}$$

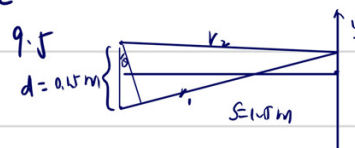
$$\text{finesse} = \frac{2\pi}{(\Delta\delta)_{\min}} = \frac{(\Delta\lambda_0)_{fsr}}{(\Delta\lambda_0)_{\min}} = \frac{(\Delta f)_{fsr}}{(\Delta f)_{\min}}$$

The value of finesse represents the travel rounds of light inside an optical resonant cavity.

$$\Delta x \times \Delta k \approx 2\pi$$

$$\Rightarrow (2n_f d \cdot \text{finesse}) \times \left(\frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda^2} \right) = 2\pi \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \text{finesse} \cdot \frac{2n_f d}{\lambda}$$

Ex.



$$r_1 - r_2 \approx d \sin \theta \approx d \frac{y}{s}$$

$$\text{Minimum: } d \frac{y}{s} = m\lambda, m \in \mathbb{N}^+$$

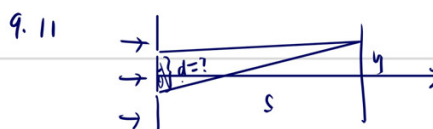
$$\Rightarrow d \frac{\Delta y}{s} = \lambda = \frac{c}{\nu}, c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, d = 0.15 \text{ m}, s = 1.5 \text{ m}$$

$$\text{From Fig. P9.5, } \Delta y \approx 37.6 \text{ cm} = 0.376 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{frequency: } \nu = 9800 \text{ Hz}$$

The pattern: Young's double-slit interference

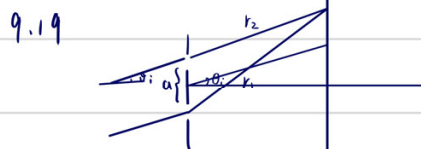
Reason: The phase of the 2 speakers are different by π .



$$\text{Since } s \gg d, \frac{y}{s} \approx \theta$$

$$\text{The 4th bright: } d \frac{y}{s} \approx \theta d = 4\lambda$$

$$\Rightarrow d = \frac{4\lambda}{\theta} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ m}$$



$$\text{Optical path difference: } \Delta = r_1 - r_2 \approx a \sin \theta_0 \approx a \theta_0 \approx a(\theta_1 + \theta)$$

$$\text{the } m\text{th maximum: } \Delta = m\lambda \Rightarrow \theta = \frac{m\lambda}{a} - \theta_1$$

$$\begin{aligned} 9.37. \quad n_1 &= 1.333 \\ n_2 &= 1.59 \end{aligned}$$

$$\text{let } \delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} t \cos \theta_t = \frac{4\pi}{\lambda_0} (n_f^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}} t \equiv (m+1)\pi$$

$$\Rightarrow \theta_i = \arcsin \left(n_i \sin \left(\frac{(m+1)\pi}{4} \right) \right) = \pm 0.729 \text{ rad}$$

衍射

惠更斯-菲涅耳原理

菲涅耳通过加进来干涉概念，解决了这个困难。相应的惠更斯-菲涅耳原理表述如下：在给定时刻，波阵面上每一未被阻挡的点起着次级球面子波（频率与初波相同）波源的作用。障碍物外任一点上光场的振幅是所有这些子波的叠加（考虑它们的振幅和相对相位）。

<<光学>> P554. 开始

P556 ① 不透明障碍物

P557 10.1.2 夫琅禾费衍射 vs 菲涅耳衍射

远场衍射条件：一条经验定则： $R > \frac{a^2}{\lambda}$ 则发生夫琅禾费衍射。

$$R = \min\{R_1, R_2\}$$

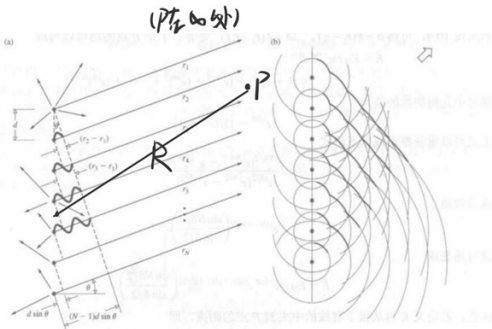


图 10.4 同相相干振子的直线阵列。(a) 注意在所示的角度上 $\delta = \pi$ ，而当 $\theta = 0$ 时， δ 等于零；(b) 从相干点源直线阵列射出的波阵面

波源阵列 /

球面子波阵列的干涉：假设各子波振幅相等、平行。

$$\text{则在 } P \text{ 处, } \tilde{E}(P) = E_0(r) \left[e^{i(kr_1 - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + e^{i(kr_N - \omega t)} \right]$$

子波所在球面半径

由图，相邻点源光程差 $\Delta = nd \sin \theta$, d 为点源间距。则相邻点源相位差 $\delta = k \Delta = kd \sin \theta$

$$\Delta \delta = k(r_2 - r_1), 2\delta = k(r_3 - r_1) \dots$$

$$\Rightarrow \tilde{E}(P) = E_0(r) e^{i(kr_1 - \omega t)} [1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}]$$

$$= E_0(r) e^{i(kr_1 - \omega t)} \cdot \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} \quad (\text{几何级数})$$

$$= E_0(r) e^{-i\omega t} e^{i(kr_1 + (N-1)d/2)} \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} = e^{i(N-1)\delta/2} \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2}$$

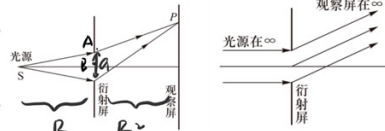
振子直线阵列到 P 的距离： $R = r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta = r_1 + \frac{1}{2k}(N-1)\delta$

$$\text{于是 } \tilde{E}(P) = E_0(r) e^{i(kR - \omega t)} \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2}$$

$$(I_0 = \frac{1}{2} E_0^2(r))$$

$$\text{光强 } I(P) = I_0 \frac{\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin \theta]}$$

近场衍射与远场衍射



$$\text{判据: } n\delta a - n\delta b < \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$

- 菲涅耳衍射 (近场衍射)：光源到衍射屏或衍射屏到观测屏距离不大
- 夫琅禾费衍射 (远场衍射)：光源和观测屏距离衍射屏无穷远

夫琅禾费衍射装置

实际上夫琅禾费条件可以用等效于图 10.3 的装置实现，其中 S 和 P 实际上都位于无穷远。点光源 S 放在透镜 L_1 的主焦点 F_1 处，观察平面则是 L_2 的第二焦面。用几何光学的术语说，光源平面和 σ 是共轭平面。

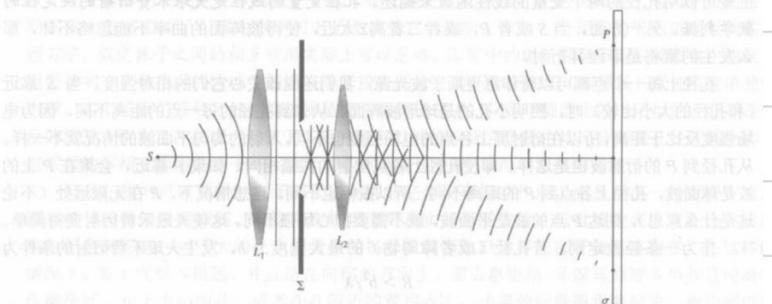


图 10.3 夫琅禾费衍射用透镜使光源和条纹图样二者都在离孔方便的距离上

最后，在远处排成直线阵列的 N 个相干的全同点源所产生的衍射图样中的通量密度分布（对于复数 E，它正比于 $E \tilde{E}^*$ ）为

$$(光强) \quad I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (10.5)$$

其中 I_0 是任何一个波源到达 P 点的通量密度。对于 $N=0$, $I=0$ ；对于 $N=1$, $I=I_0$ ，而对于 $N=2$, $I=4I_0 \cos^2(\delta/2)$ ，与 (9.17) 式一致。I 对 θ 的函数关系在下式中更明显：

$$I = I_0 \frac{\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin \theta]} \quad (\delta = kd \sin \theta) \quad (10.6)$$

$\sin^2[N(kd/2)\sin\theta]$ 项有急剧的起伏, 然而调制它的函数 $\{\sin[(kd/2)\sin\theta]\}^{-2}$ 则变化比较缓慢。这个联合表示式给出一系列尖锐的主峰, 它们之间隔着小的辅峰, 主极大出现在 $\delta = 2m\pi$ (其中 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的 θ_m 方向上, 因为 $\delta = kd\sin\theta$,

$$d\sin\theta_m = m\lambda$$

$$\delta = 2m\pi \rightarrow \sum_{\lambda=0.7}^{\lambda} d\sin\theta = 2m\pi$$

由于在 $\delta = 2m\pi$ 时 $[\sin^2 N\delta/2]/[\sin^2 \delta/2] = N^2$ [由洛必达 (L'Hospital) 法则], 主极大值为 $N^2 I_0$ 。这正是我们预期的, 因为在那个方向上所有振子同相。在垂直于阵列的方向 ($m=0, \theta_0=0$ 和 π) 上, 这个系统将辐射一个极大值。随着 θ 增大, δ 也增大, I 在 $N\delta/2 = \pi$ (第一个极小点) 下降到零。注意, 若在 (10.7) 式中 $d < \lambda$, 那么只有 $m=0$ 或零级主极大存在。如果考察彼此相隔原子大小距离的电子振子构成的理想化的线光源, 那么可以预期, 光场中只有一个主极大。

$$\text{主极大外: } d\sin\theta_m = m\lambda,$$

$$\text{主极大值 } I_m = I_0 N^2 \quad (\text{洛})$$

0 相干线光源

波源强度

某点发出子波 $E = \frac{E_0}{r} \sin(\omega t - kr)$ 。设子波源共 N 个, 阵列长度为 D

则长度微元 Δy_i 上波源数为 $\Delta y_i \frac{N}{D}$, 该元段对 P 点电场贡献为: $E_i = \frac{E_0}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \frac{\Delta y_i N}{D}$

令 $N \rightarrow \infty$, 则 $\Delta y_i \rightarrow 0$, Def 单位长度的波源强度 $E_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} E_0 N$

则 P 点总场强为 $E(P) \equiv \sum_i \frac{E_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i$

$$\text{i.e. } E(P) = E_L \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{\sin(\omega t - kr(y))}{r(y)} dy, \quad r = r(y) \quad (10.9)$$

$$\text{或复化: } \tilde{E}(P) = E_L \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{e^{i(\omega t - kr(y))}}{r(y)} dy$$

0 单缝: 如图 10.5 中, $D \gg \lambda$ 时,

在分母的 $r(y)$ 对 dy 可看作常数 R (缝光源点到 P 的距离)

但 $\sin(\omega t - kr(y))$ 中的 $r(y)$ 不行, 因为相位对 $r(y)$ 变化很敏感。

把 $r(y)$ 展开: $r = R - y \sin\theta + \frac{y^2}{2R} \cos^2\theta + \dots$ (余弦定理: $r^2 = y^2 + R^2 - 2yR \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$)

$$\text{取前两项, 代入得 } E = \frac{E_L}{R} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \sin[\omega t - k(R - y \sin\theta)] dy$$

$$\text{i.e. } E = \frac{E_L D}{R} \frac{\sin[(D/2) \sin\theta]}{(D/2) \sin\theta} \sin(\omega t - kR)$$

$$\text{令 } \beta \equiv (kD/2 \sin\theta, \pi) \quad E = \frac{E_L D}{R} \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$

$$\text{Def } \text{sinc}(\theta) \equiv \frac{\sin\theta}{\theta}, \text{ 则 } E = \frac{E_L D}{R} \text{sinc}(\beta) \sin(\omega t - kR), \quad \tilde{E} = \frac{E_L D}{R} \text{sinc}(\beta) e^{i(\omega t - kR)}$$

相干 去掉与 t 相关的项, 其余平方并求平均。

$$\text{故 } I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \frac{kD \sin\theta}{2} \quad (I = \int_0^T \tilde{E}^2 dt)$$

$$\text{当 } \theta \rightarrow 0 \text{ 时, } \beta \rightarrow 0, \quad I(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_L D}{R} \right)^2, \quad I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 = I(0) \text{sinc}^2 \beta$$

$\left\{ \begin{array}{l} D \gg \lambda \text{ 时, } \beta \text{ 很大, 若 } \theta \neq 0, \text{ 则 } \frac{\sin\beta}{\beta} \rightarrow 0, I(\theta \neq 0) \rightarrow 0. \text{ [等效为在 } \theta=0 \text{ 向上的点光源体]} \\ D \ll \lambda \text{ 时, } \beta \text{ 很小, } \frac{\sin\beta}{\beta} \rightarrow 1, I(\theta) \approx I(0) \text{ [线光源} \rightarrow \text{点光源, 波} \rightarrow \text{球面波]} \end{array} \right.$

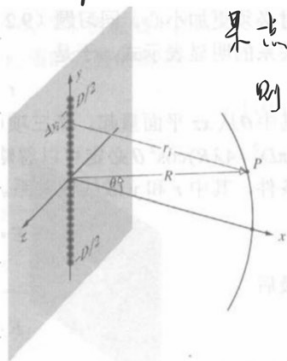


图 10.5 一个相干线光源

单缝夫琅禾费衍射

等效无数个子轴上的圆面波光源

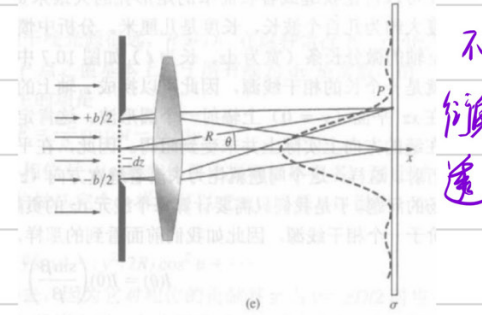
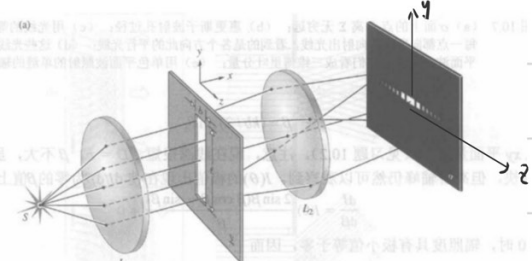
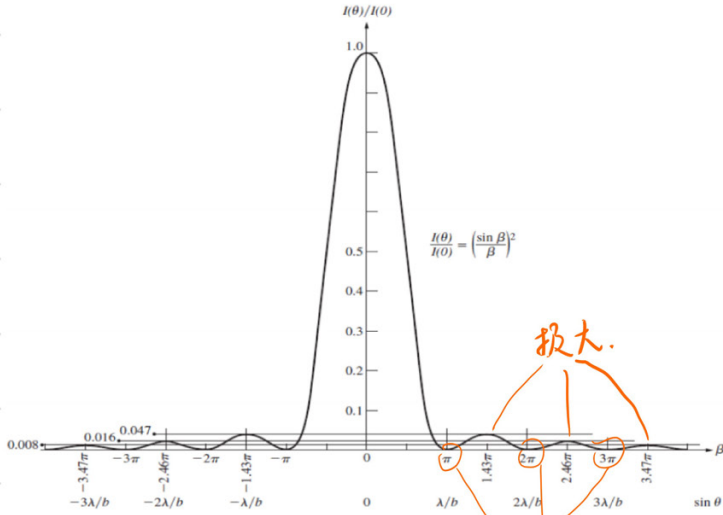
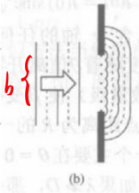
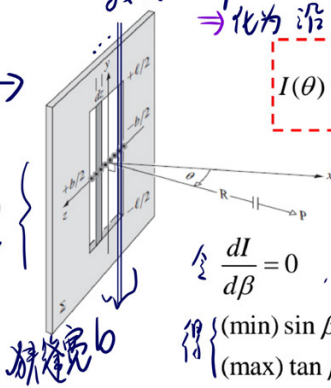
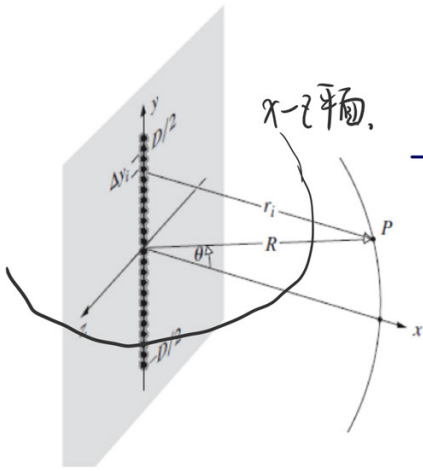
化为沿z轴由方向排列的圆点光源，又回到了光源问题。

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{kb \sin \theta}{2}, I(0) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E_0^2)$$

此处 θ 非上页中的 θ 。

$$\frac{dI}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \sin \beta (\cos \beta \cdot \beta - \sin \beta) = 0 \quad (\text{极值})$$

$$\begin{cases} (\min) \sin \beta = 0 \Rightarrow b \sin \theta = m\lambda \\ (\max) \tan \beta = \beta \Rightarrow \beta = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \dots \end{cases}$$



不论狭缝在那，衍射图样都以透镜轴为中心

另一种解释：

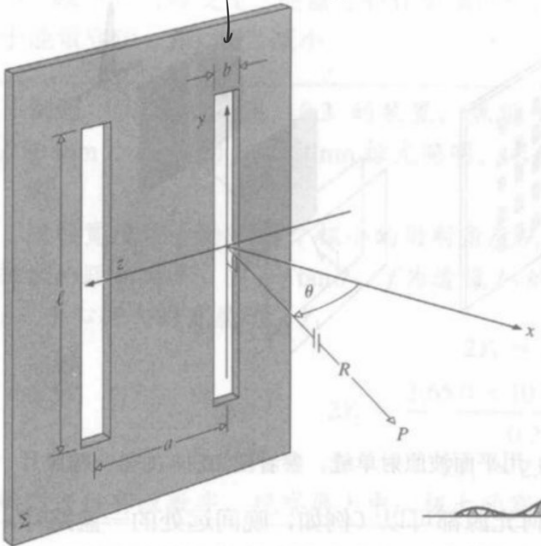
不确定性原理

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$$

$$\text{动量 } p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

双缝衍射

b 为狭缝宽度



$$E = \frac{\epsilon_0 b}{R} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} F(z) dz + \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} F(z) dz \right], F(z) = \sin[\omega t - k(RR - \sin \theta)]$$

$$= \frac{\epsilon_0 b}{R} \left[\sin(\omega t - kR + \sin \theta) + \sin(\omega t - kR + \sin \theta + \alpha) \right], \begin{cases} \alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta \\ \beta = \frac{kb}{2} \sin \theta \end{cases}$$

$$= 2b \frac{\epsilon_0}{R} \cos \alpha \sin(\omega t - kR + \alpha)$$

$$I(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt = 4I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha = 4I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right), T = \frac{2\pi}{\omega}$$

当 $b \rightarrow 0$,

$$I(\theta) \rightarrow 4I_0 \cos^2 \alpha$$

退化为杨氏双缝干涉

$$\text{当 } a \rightarrow 0, I(\theta) \rightarrow 4I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

双缝退化为单缝

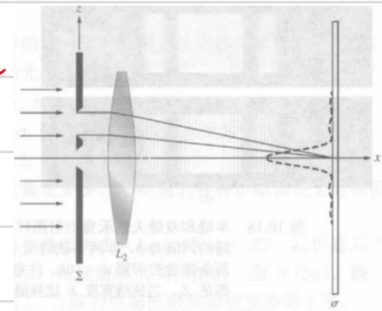


图 10.16 双缝装置

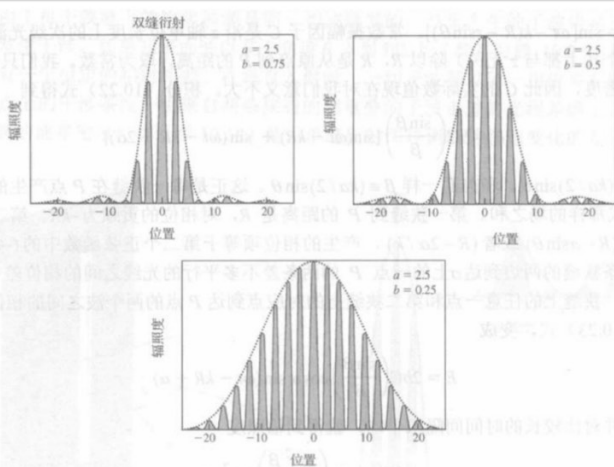


图 10.19 双缝夫琅禾费衍射。保持狭缝间隔 a 不变，狭缝宽度 b 由 0.75 mm 减小到 0.25 mm。当每条狭缝变窄时，虚线代表的单狭缝的包络变宽，包含更多的双缝（余弦平方）条纹，双缝条纹除了高度变化之外，别的保持不变

不能：哪边缝出去，缝哪个地方出去。
(a) (b)

而 $a > b$ ，由 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$ ， $a > b$ ，故 $\Delta p_b > \Delta p_a$

故外包络由狭缝宽度 b 决定。

包络内部峰数由 a, b 比例决定。

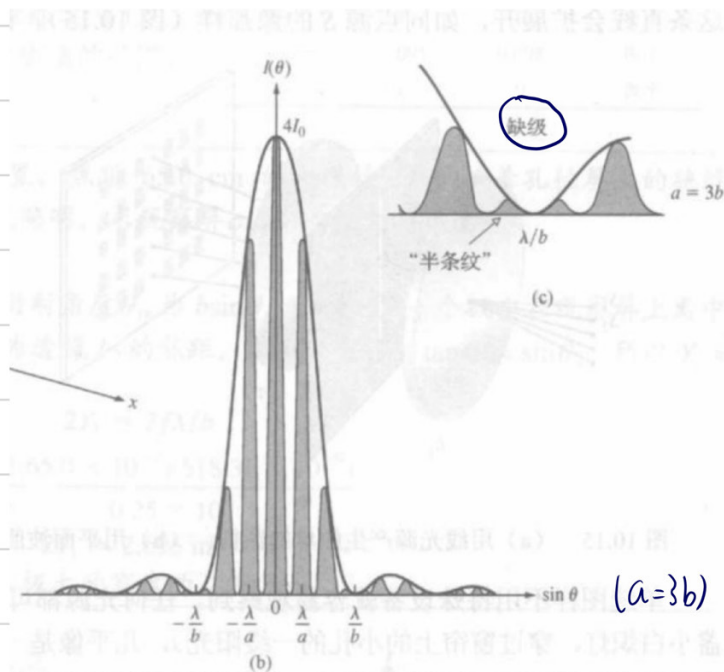
若 $a = mb$ ，则中央的峰会有 $2m$ 个亮纹。

缺级：一个干涉极大值和一个衍射极小值对应于同时
此时该位置上内峰被抑制。

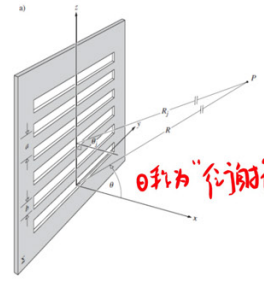
外边极大、极小值

$$\begin{cases} \frac{ka \sin \theta}{2} = m\pi \rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a} \\ \frac{kb \sin \theta}{2} = (m+\frac{1}{2})\pi \rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a} + \frac{\lambda}{2a} \end{cases}$$

“你打你的，我打我的”



多缝衍射



记 $r = R - c \sin \theta$

$$\tilde{E} = \frac{E_0}{R} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} F(z) dz + \frac{E_0}{R} \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} F(z) dz + \dots + \frac{E_0}{R} \int_{2a-\frac{b}{2}}^{2a+\frac{b}{2}} F(z) dz + \dots$$

$$F(z) = \sin[\omega t - k(R - \sin \theta)] = \sin[\omega t - kr]$$

则 $E_j = \frac{E_0}{R} \int_{ja-\frac{b}{2}}^{ja+\frac{b}{2}} F(z) dz = \frac{E_0}{R} b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin[\omega t - kr + 2\alpha j]$, $\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$, $\beta = \frac{kb}{2} \sin \theta$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

若令 $E_j = I_m \tilde{E}_j$, 则 $\tilde{E}_j = \frac{E_0}{R} b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) e^{i(\omega t - kr + 2\alpha j)}$

$$\tilde{E} = E_j = \left(\frac{E_0}{R} b \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cdot e^{i\sin \theta (\omega t - kr)} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{2i\alpha})^j$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} (e^{2i\alpha})^j = \frac{1 - e^{2iN\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = e^{i(N-1)\alpha} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{b E_0}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

$\alpha = \frac{ka \sin \theta}{2}$

主极大 (Principal maximum): $\left| \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right| = N, \alpha = m\pi \Rightarrow a \sin \theta_m = m\lambda$

次极大 (Subsidiary maxima): $\left| \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right| = 1, \alpha = \frac{(m' + \frac{1}{2})\pi}{N}$

单缝衍射因子/强度因子: $\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$

缝间距/位置因子: $\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$

缝间距/位置因子: $\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = N^2$, 故 $I_{N \max} = N^2 I(\theta)$

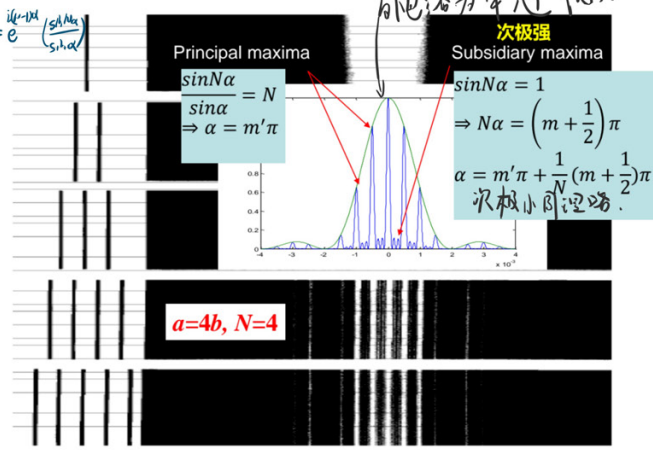
单缝衍射光强: $\frac{\sin \beta}{\beta} = 0$

次极大: $\left| \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right| = 1, \alpha = \frac{(m' + \frac{1}{2})\pi}{N}$

每两主极大间有 $N-1$ 个暗线, 每两暗线间有 1 个次极大, 两主极大间有 $N-2$ 个次极大。

光强为双缝干涉的相位置。

理论与实验结果对比



从单缝到多缝的夫琅禾费衍射图案

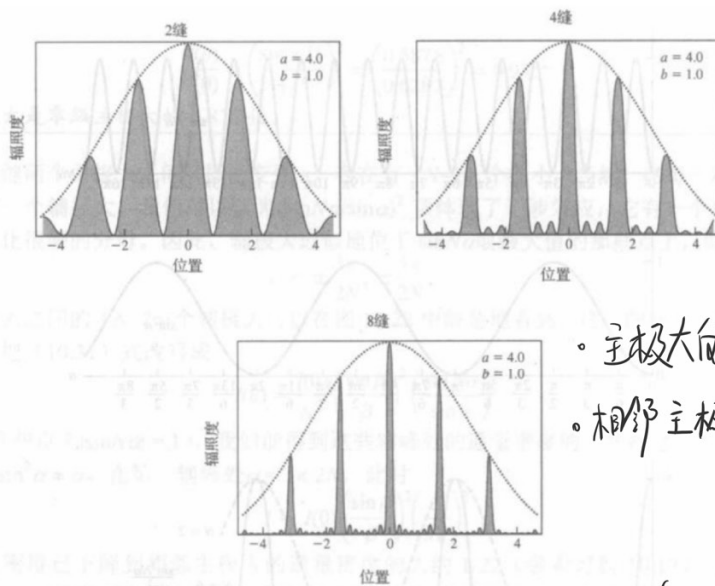
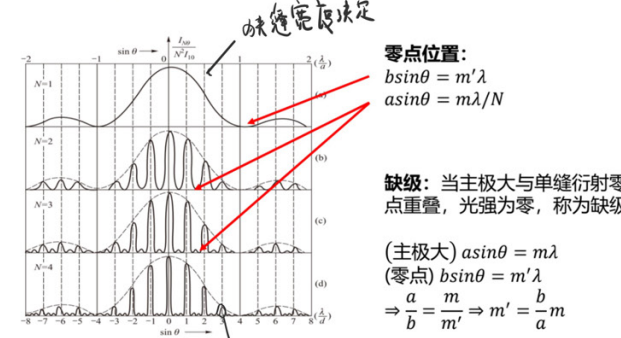


图 10.28 多缝衍射, 每条缝的宽度都不是无穷小。开的狭缝越多, 峰越窄。注意, (主极大的位置是固定的。还有, 相邻两个主极大之间有 $(N-2)$ 个辅极大 (N 是狭缝数目, 大于 1))

主极大的位置是固定的。
相邻主极大间有 $(N-2)$ 个次极大

主极大数目限制: $m < \frac{a}{\lambda}$ 若 $\lambda > a$, 则只有零级极大。
由 $a \sin \theta_m = m\lambda$, $\sin \theta_m < 1$, 故 $m < \frac{a}{\lambda}$

缺级: 主极大与单缝衍射零点重叠 (单缝) 零点重合。

i.e. $\begin{cases} \left| \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right| = N \\ \sin \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ka}{2} \sin \theta = k\pi \\ \frac{kb}{2} \sin \theta = m'\pi \end{cases}$

$\Rightarrow m = m' \frac{a}{b}, m' = 0, 1, 2, \dots$

主极大的缺级级次。

其他形状的孔

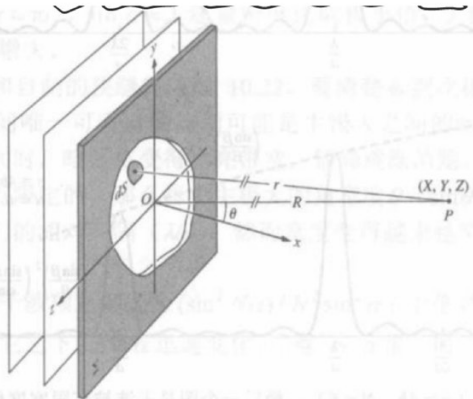


图 10.29 来自一个任意孔径的夫琅禾费衍射，这里 r 和 R 比孔的大小要大得多

$$d\tilde{E} = \frac{\epsilon_A}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS \quad (\text{实际上, } \epsilon_A = -\frac{i\epsilon_0}{\pi})$$

$$r = [X^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2]^{\frac{1}{2}}, \text{ 为 } dS \text{ 到 } P \text{ 的距离.}$$

$$\text{当 } r, R \gg \text{孔径时, } r \approx R \left[1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - 2\frac{(Yy + Zz)}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(R = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}) \approx R \left(1 - \frac{(Yy + Zz)}{R^2} \right)$$

$$\therefore d\tilde{E} \approx \frac{\epsilon_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} e^{ik(Yy + Zz)/R}$$

这里直接 $r \approx R$

$$\longrightarrow \tilde{E} = \frac{\epsilon_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_A e^{ik(Yy + Zz)/R} dS$$

矩形孔

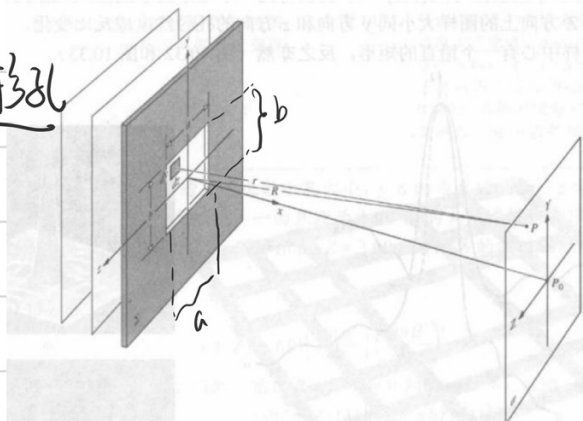
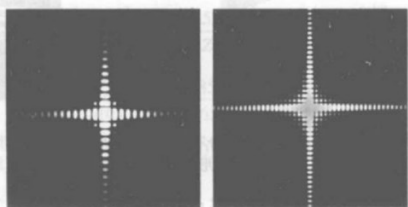


图 10.30 矩形孔径



(a) 方孔的夫琅禾费图样；(b) 同一个图样，增加曝光量以显示一些暗的部分

$$\text{此时 } \tilde{E} = \frac{\epsilon_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R} dy \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R} dz$$

$$\beta' = \frac{kby}{2R}, \alpha' = \frac{kaz}{2R} \quad \text{有 } \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R} dy = b \left(\frac{e^{i\beta'} - e^{-i\beta'}}{2i\beta'} \right) = b \frac{\sin \beta'}{\beta'}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R} dz = a \frac{\sin \alpha'}{\alpha'}$$

$$\therefore \tilde{E} = \frac{A\epsilon_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right) \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right) \quad (A = ab)$$

$$\longrightarrow I(Y, Z) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)^2$$

↑
P 点的辐照度

$$\text{极值: } \frac{dI}{d\beta} = 0 \Rightarrow 2 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \beta = 0 \text{ or } \beta = \tan \beta$$

$$\downarrow$$

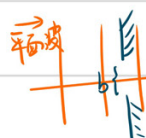
$$\beta = m\pi$$

$$\downarrow$$

$$b \sin \theta_1 = m\lambda$$

$$\text{不妨看看 } m=1, \sin \theta_1 \sim \frac{\lambda}{b}$$

(和那个 $1.22 \frac{\lambda}{D}$ 同一量级哦)



$$\begin{cases} P = P_x \\ P_y = 0, \text{ 即 } y = b \end{cases} \rightarrow \Delta P_y \sim \Delta y \sim \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_y}{P} = \sin \theta \sim \frac{\lambda}{b} \sim \frac{\lambda}{D}, \text{ 与上面结果一致.}$$

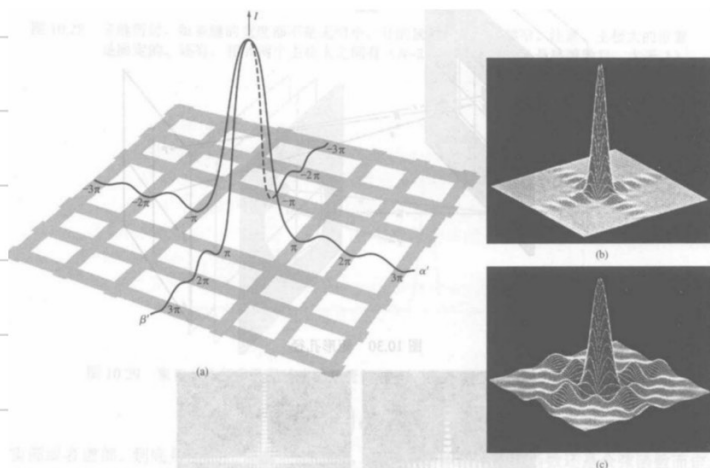
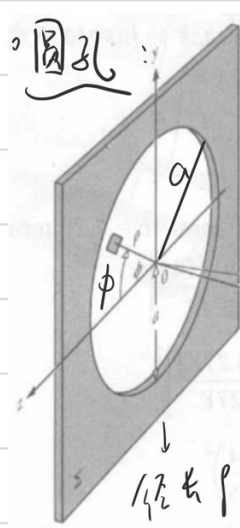


图 10.31 (a) 方形孔的辐照度分布；(b) 方形孔夫琅禾费衍射产生的辐照度；(c) 方形孔夫琅禾费衍射产生的电场分布



$$\tilde{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_A e^{ik(y + z)/R} dS$$

圆孔L: $z = p \cos \phi, y = p \sin \phi$
 $z = q \cos \Phi, y = q \sin \Phi$

$$dS = p dp d\phi$$

$$\therefore \tilde{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{p=0}^a \int_0^{2\pi} e^{ik(pq/R) \cos \phi} p dp d\phi$$

这次直接舍去，因为对称。

与phi有关部分: $\int_0^{2\pi} e^{(ikpq/R) \cos \phi} d\phi \leftarrow$ 零阶 Bessel 函数。

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} e^{(ikpq/R) \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(kpq/R)$$

$$\therefore \tilde{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi \int_0^a J_0(kpq/R) p dp$$

$$2\pi \int_0^a J_0(kpq/R) p dp = \left(\frac{R}{kq}\right)^2 \int_0^w J_0(w) w dw$$

$$= \frac{aR}{kq} J_1(kaq/R)$$

$$\therefore \tilde{E}(t) = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi a \frac{R}{kq} J_1(kaq/R)$$

$$\therefore I = 2 \tilde{E} \tilde{E}^* = \frac{2\epsilon_A^2 A^2}{R^2} \left[\frac{J_1(kaq/R)}{kaq/R} \right]^2$$

$$\text{由 } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } I(0) = \frac{\epsilon_A^2 A^2}{2R^2}$$

$$\therefore I(q) = I(0) \left[\frac{2J_1(kaq/R)}{kaq/R} \right]^2$$

$$\text{由 } \sin \theta = \frac{q}{R}, \text{ 得 } I(\theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

中央亮斑被一暗环包围，暗环: $I=0$ i.e. $J_1(kaq/R)$

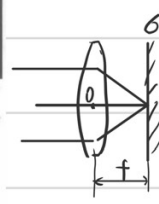
$J_1(u)$ 的第一个零点 $u_1' = 3.83$, i.e. $\frac{kaq_1}{R} = 3.83$ 时, $I=0$

$$\therefore q_1 = \frac{3.83 R \lambda}{2\pi a} = 1.22 \frac{R \lambda}{a} = 1.22 \frac{R}{D} \lambda, \quad D=2a \text{ 为孔直径}$$

对一个聚光到屏上的连续，焦距 $f \approx R$, 则有 $q_1 = 1.22 \frac{f}{\lambda}$

(傍轴近似)

指成像系统，比如望远镜



$(\Delta x)_{\min}$ 约为 1 弧分。由于焦距约为 20 mm, 视网膜上的 $(\Delta x)_{\min}$ 约为 6700 nm, 这大约为视觉感受器之间间距的两倍。因此，人眼应当有可能分辨距离大约 100 m 远、间隔为 2~3 cm 的两点。你也许不能分辨得这么好，千分之一也许更有可能。

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{f}{D} = 1.22 \frac{2 \times 10^{-2} \cdot 0.00015}{10^{-2}} \sim 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Delta x = f \cdot \theta = 2 \times 10^{-2} \cdot \frac{2 \times 10^{-4}}{10^{-2}} \sim 10^{-6} \text{ m}$$

图 10.34 圆孔径的几何位置

Bessel 函数: $J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(uv + m \cos v)} dv, \quad \text{Re } u > 0, m \in \mathbb{N}$

(Ref)

当 $m=0$ 时, $J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i u \cos v} dv$

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u)$$

$$- m=1 \text{ 时, } \int_0^u J_0(u) u du = u J_1(u)$$

$$- J_0(u) = \frac{d}{du} J_1(u) + \frac{J_1(u)}{u}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2}$$

中央亮斑
叫 Airy 斑。

求极大: $\frac{d}{du} \left[\frac{J_1(u)}{u} \right] = 0$
 $\Leftrightarrow J_2(u) = 0$

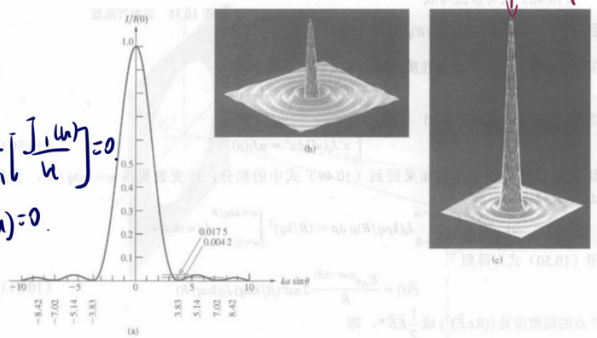


图 10.36 (a) 爱里图样; (b) 圆孔夫琅禾费衍射的电场; (c) 圆孔夫琅禾费衍射的辐照度

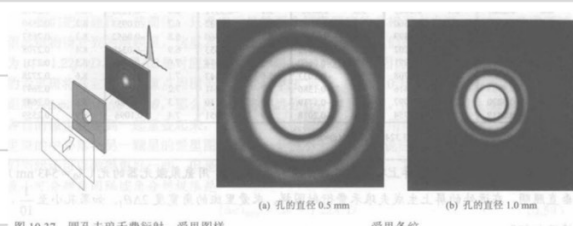
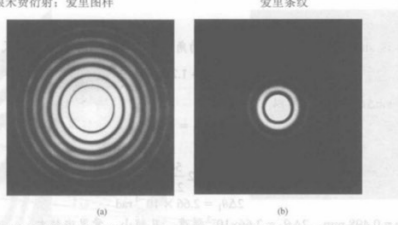


图 10.37 圆孔夫琅禾费衍射: 爱里图样



(a) 长曝光的爱里条纹 (孔直径 1.5 mm); (b) 短曝光的中心爱里斑 (同样的孔直径)

成像系统的分辨率.

由 $\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$.

若 $\Delta\theta$ 为 θ_1 对应的大小, i.e. $R \sin \Delta\theta = \lambda$.

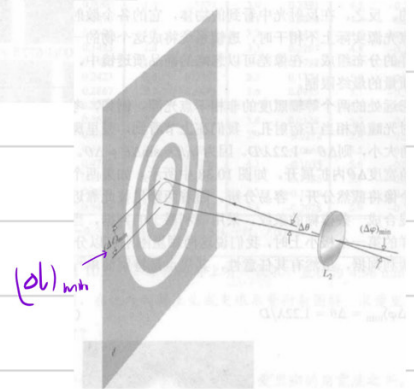
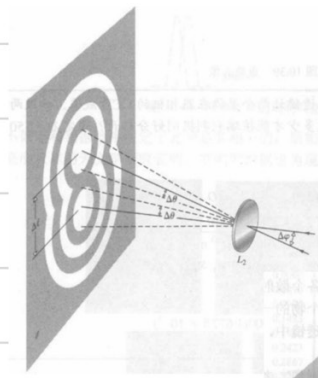
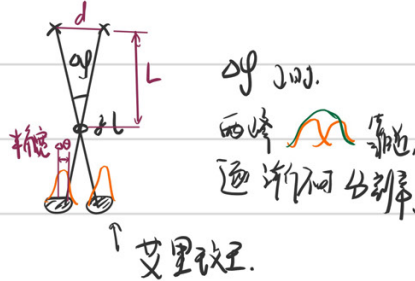
则 $\Delta\theta \approx \sin \Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{R} \approx 1.22 \frac{\lambda}{f}$. ($f \approx R$).

• Rayleigh 判据: 两像角距离 $\geq$ 像的半角宽.

(假设长相等).

分别在孔外发生

孔束球面波衍射.



可分辨率极限: $\Delta\theta \geq \Delta\theta_1$. i.e. $\Delta\theta \geq 1.22 \frac{\lambda}{D}$

或以距离表示: 设 Δl 为两个像中心间的距离.

则分辨率极限: $\Delta l \geq 1.22 \frac{\lambda f}{D}$

一般成像系统的分辨率
定义为 $\frac{1}{\Delta l_{min}}$ or $\frac{1}{\Delta\theta_{min}}$

注: $\Delta\theta$ 为半角宽, 对应光斑的半径; $\Delta\theta$ 为远处光源的角直径, 对应直径/线度.

P596 10.2.7 零阶 Bessel 光束

• 人的视觉是对数坐标.

eg,

设圆孔半径 $R_1 = 0.1 \text{ mm}$, L_1 的焦距 $f = 50 \text{ cm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$
试求: 在接收屏上爱里斑的半径; 若圆孔半径改用 $R_2 = 1.0 \text{ mm}$, 其它条件不变, 爱里斑半径变为多大?
这两个爱里斑的半径上平均光强的比为多少?

解: 因为 $r_0 = \theta_0 f = 1.22 \lambda f / D$

所以, $r_{01} = 1.22 \times \frac{500 \times 10^{-9} \times 50 \times 10^{-2}}{2 \times 0.1 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$

$r_{02} = 1.22 \times \frac{500 \times 10^{-9} \times 50 \times 10^{-2}}{2 \times 1.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}$

设入射光的能流密度为 I_0 (即光强), 则穿过半径为 R_1 和 R_2 圆孔的光能流分别为:

$$P_1 = I_0 \cdot \pi R_1^2 \quad P_2 = I_0 \cdot \pi R_2^2$$

$$P_1 / P_2 = R_1^2 / R_2^2 = 10^{-2}$$

爱里斑上集中了衍射光能的 83.8%, 所以爱里斑上平均光强之比为:

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{P_1 \times 83.8\% / \pi r_{01}^2}{P_2 \times 83.8\% / \pi r_{02}^2} = 10^{-4}$$

可见, 爱里斑半径缩小 10 倍, 但爱里斑上平均光强却增大 10000 倍。

光栅 (多缝衍射)

Reflection phase grating

反射光栅

平行光经过光栅元件, 全使出射波的相位、振幅或二者同时产生交替变化。

光栅的刻痕相当于子波源。

$$a \sin \theta_m = m \lambda: \text{正入射的光栅方程}$$

≡ 狭缝间距, 叫“光栅常数”, 决定了各级谱线的位置。

Q1: 亮纹宽度? 由主极大导出? 亮纹宽度 = 亮纹中心到旁边第一个极小的距离

$$\text{次极小: } \sin \alpha = 0 \rightarrow \sin \theta_m = \frac{m \lambda}{a N}$$

$$D \cos \theta_m d\theta = \frac{\lambda}{a N} dm$$

$$\therefore \Delta \theta = \frac{d\theta}{dm} = \frac{\lambda}{a N \cos \theta_m}$$

亮纹半角宽度: $\Delta \theta = \frac{\lambda}{N a \cos \theta_m}$ $N a$ 可看成光栅总宽度

Q2: 角色散? 由主极大导出? $\alpha = \frac{k a \sin \theta}{2} = m \pi$

$$\text{主极大(级)距离: 波长差} \rightarrow \sin \theta_m = \frac{m \lambda}{a} \rightarrow \cos \theta_m d\theta = \frac{m}{a} d\lambda$$

$$\text{Def: } D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \therefore D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos \theta_m} \text{ 角色散 } f'$$

$$D_\lambda = \frac{d\lambda}{d\lambda} \text{ 线色散} = \text{角色散} \times \text{焦距} = f' D_\theta$$

推论: 零级 ($m=0$) 无色散; a (光栅常数) ↓, 光谱级数 ↑, 色散越大

$\theta \rightarrow 0$ 时, $\cos \theta_m \sim 1, D_\theta = \frac{m}{a}, D_\lambda = \frac{f' m}{a}$ 近似与波长无关。
于是谱线位置与波长呈线性关系, 光谱为匀排光谱

$$\text{Def (b) 分辨本领 } A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} (= m N) \text{ 平均波长}$$

最小分辨波长差

$$\text{由 } \delta \theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \delta \lambda = D_\theta \delta \lambda$$

当 $\delta \theta = \Delta \theta_m$ (亮纹半角宽) 时,

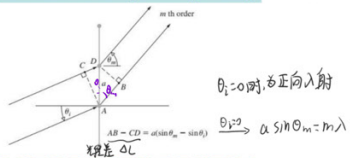
$$\delta \lambda = \Delta \lambda = \frac{\Delta \theta}{D_\theta} = \frac{\lambda}{m N}$$

故可得 $A = m N$

$$\text{光栅方程 } \sin \theta_m = \frac{N a \sin \theta_m}{\lambda} \text{ (若 } \sin \theta_i = 0 \text{)}$$

Transmission phase grating

透射光栅

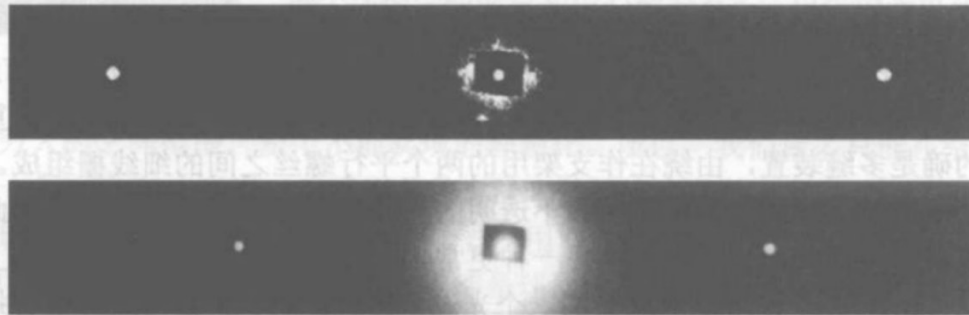
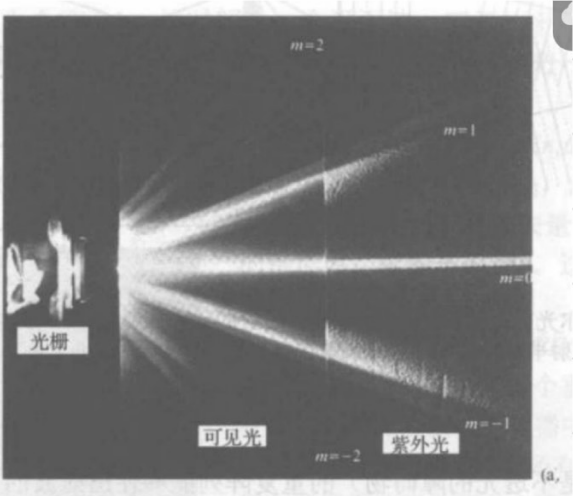


$\theta_i = 0$ 时, 为正向入射

$$\theta_i \neq 0 \rightarrow a \sin \theta_m = m \lambda$$

$$\text{(Grating equation)} \quad a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m \lambda$$

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m \lambda \text{ 光栅方程}$$



通过一个光栅的光。(a) 左边区域是可见光谱, 右边是紫外光谱; (b) 氦氖激光 (空气中波长为 632.8 nm) 照在 530 线/毫米的光栅上时 $m=0$ 和 $m=\pm 1$ 的衍射光束; (c) 把上面的装置泡在水里。从测出的 θ_i 值, 光栅方程给出氦氖激光在水中的波长 λ_w 为 471 nm, 因此水的折射率为 $n_w = 1.34$

分光仪器性能参数对比

$\lambda = 500 \text{ nm}$

仪器	K (级次)	N	A	$\delta \lambda / \text{nm}$	$\Delta \lambda_{sr} / \text{nm}$
法布里-珀罗标准具 $h=25 \text{ mm}, r=0.95$	10^5	30	3×10^6	1.6×10^{-4}	0.005
迈克耳孙干涉仪 $h=25 \text{ mm}$	10^5	2	3×10^5	0.0025	0.005
洛兰光栅	3	10^5	3×10^5	0.002	200

一般光栅使用的光谱级数为 10 级。

色散范围大。

Def 自由光谱范围 $\Delta \lambda_{sr} = \frac{\lambda}{m}$

临界: $\lambda + \Delta \lambda$ 的 m 级光谱与 λ 的 $m+1$ 级光谱重合。

$$\text{i.e. } m(\lambda + \Delta \lambda_{sr}) = (m+1)\lambda$$

$$\therefore \Delta \lambda_{sr} = \frac{\lambda}{m}$$

期望：色散本领大，谱线锐（主极大间隔大而谱线半宽小），色分辨本领大。

但对上述两种光栅， $D_0 = \frac{m}{a \cos \theta_m}$, $A = N m$, $\Delta \theta = \frac{m \lambda}{a}$, $I_{N \max} = N^2 I_1(\theta)$

当级次 $m \uparrow$, $D_0 \uparrow$, $A \uparrow$, 但 $\Delta \theta \uparrow$, $I_{N \max} \downarrow$. 呃呢，矛盾呢...

PS: $a \sin \theta_m = m \lambda$ ($\Delta L = d \sin \theta = m \lambda$)

光栅方程实际上是描述杨氏双缝装置极大位置的 (9.29) 式，这不当使你感到惊奇，所有同一个角度的干涉极大，现在只是变得更尖锐（就像法布里-珀罗标准具的多光束工作模式使得条纹更尖锐一样）。在双缝的情况，当观察点稍微偏离辐照度极大的中心时，从两条狭缝来的两个波多少还有一点同相，所以辐照度虽然变小了，但是还不太小。于是亮区很宽。/相反对多光束系统，虽然各个波在极大的中心相长干涉，但是一个小小的移动会导致某些波对其他波有 $\lambda/2$ 的相位差。例如，假定 P 点从 θ_1 移动到 $a \sin \theta = 1.010 \lambda$ ，而不是 1.000λ ，每个波到达 P 点时都比上一个波移动了 0.01λ 。那么相差 50 条狭缝来的光就相差 $\lambda/2$ ，互相抵消。其结果就是在辐照度极大之外的迅速减弱。

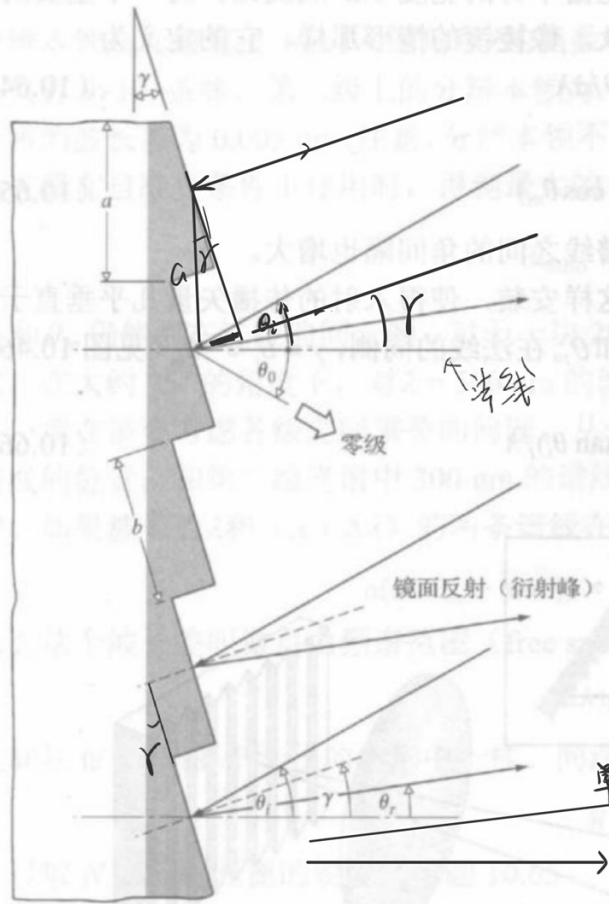


图 10.44 一段闪耀反射相位光栅

。闪耀光栅， γ 为闪耀角。

反射光栅的光栅方程： $a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m \lambda$

反映单元间干涉

衍射零级：垂直槽面入射，集中大部分光强。

干涉零级：垂直光栅平面入射，无色散。

① 对衍射的零级条纹： $\theta_i = 0$.

$\theta_m = 2\gamma$.

故 $a \sin 2\gamma = m \lambda$

$\rightarrow m = \frac{a \sin 2\gamma}{\lambda}$

。(4级) 第 m 级光谱集中大部分光强。

零级

。若想令特定第 m 级光谱最亮，则可设计 $\gamma = \arcsin \frac{m \lambda}{a}$

即可。

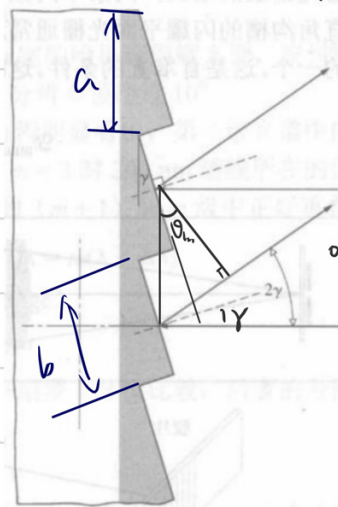


图 10.45 闪耀光栅

②。当垂直槽面入射时，两单元间 $\Delta L = 2a \sin \gamma$ (一来一回嘛)

(相当于 $\theta_m = \gamma, \theta_i = -\gamma$)

$\therefore$ 亮级： $2a \sin \gamma = m \lambda$

干涉因子： m 级

衍射因子： 0 级

因为垂直槽面入射，衍射角为 0。

提：集中光强的级次与无色散的级次分离开了。

。对其他状况利用 $a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m \lambda$ 一样可解释。

越多，张度越大
相当于长度越长。

A ：这光到 F-凹镜反射多少光？和平长度越长。

反射级数

5 级级数直接相关

基尔霍夫衍射理论

对于单色光扰动 E , $\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

设 $\tilde{E} = \tilde{E} e^{-ikct}$ 代入得 $\nabla^2 \tilde{E} + k^2 \tilde{E} = 0$ ← 亥姆霍兹方程

↑
($\tilde{E}$ 代表扰动的空间部分)

→ 其实就是 $\iint \nabla \cdot (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) dV$ 嘛

格林第二定理: $\iiint_V (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1) dV = \oint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{S}$

若 U_1, U_2 均为 $\nabla^2 \tilde{E} + k^2 \tilde{E} = 0$ 的解

$$\text{则 } \begin{cases} \nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0 \\ \nabla^2 U_2 + k^2 U_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \oint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (0)$$

(还是)

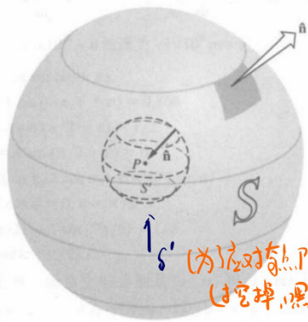


图 A2.1

关于任点 P 的扰动: 令 $U_1 = \tilde{E}, U_2 = \frac{e^{ikr}}{r}$, r 从 P 出发测量

P 点为一奇点, 以一小球包围它

$$\text{则 } (0) \Rightarrow \oint_S [\tilde{E} \nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{E}] \cdot d\vec{S} + \oint_{S'} [\tilde{E} \nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{E}] \cdot d\vec{S}' = 0$$

关于 S' 积分部分: $\nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) = \frac{\partial}{\partial r} (\frac{e^{ikr}}{r}) = -(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}) e^{ikr} \hat{n}$ ($\hat{r} = -\hat{n}$)

$$\text{于是 } I_{S'} = \oint_{S'} [\tilde{E} \nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{E}] \cdot d\vec{S}' = \oint_{S'} e^{ikr} (\tilde{E} - ik\tilde{E}r + r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r}) d\Omega$$

令球面 S' 上 $r \rightarrow 0$, 则 $e^{ikr} \rightarrow 1$. 由狄利克雷定理, 此时 $\tilde{E} \rightarrow \tilde{E}_P$. $I_{S'} \rightarrow 4\pi \tilde{E}_P$ ($d\Omega = \frac{dS}{r^2}, \nabla \tilde{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} r d\Omega$)

任一点 P 的光扰动, 以包围 P 的任一闭合曲面表示为:

(基尔霍夫积分定理)

$$\tilde{E}_P = \frac{1}{4\pi} \left[\oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{E} \cdot d\vec{S} - \oint_S \tilde{E} \nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) \cdot d\vec{S} \right] \quad (1)$$

[Kirchhoff's Integral Theorem]

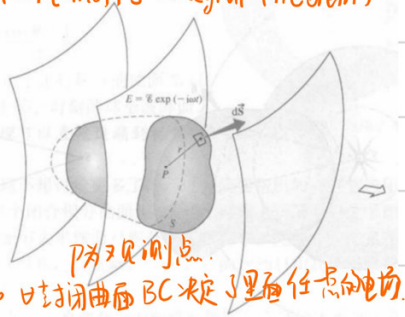


图 10.87 包围 P 点的任意闭合面 S

应用则由 S 发出的球面波:

$$\tilde{E}(r, t) = \frac{\xi_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

$$\tilde{E}(r) = \frac{\xi_0}{r} e^{ikr} \quad (\text{点光源的扰动})$$

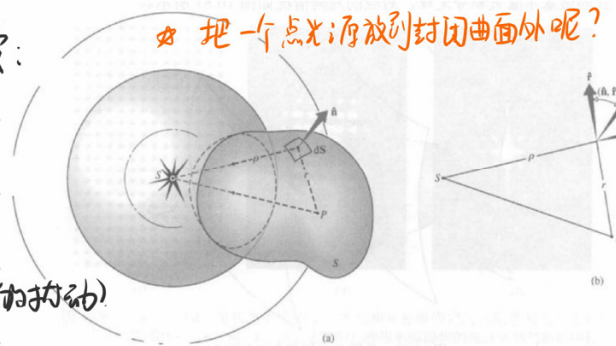


图 10.88 从点 S 射出的球面波

$$\text{代入 (1), 得 } \tilde{E}_P = \frac{1}{4\pi} \left[\oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{\xi_0}{r} e^{ikr}) \cos \langle \hat{n}, \hat{r} \rangle dS - \oint_S \frac{\xi_0}{r} e^{ikr} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{e^{ikr}}{r}) \cos \langle \hat{n}, \hat{r} \rangle dS \right]$$

$$\text{其中 } \nabla (\frac{e^{ikr}}{r}) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{e^{ikr}}{r}), \quad \nabla \tilde{E}(r) = \hat{r} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r}$$

$$\text{又 } \frac{\partial}{\partial r} (\frac{e^{ikr}}{r}) = e^{ikr} (\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}), \quad \frac{\partial}{\partial r} (\frac{e^{ikr}}{r}) = e^{ikr} (\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2})$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_p = \frac{1}{4\pi} \left[\oint_S \frac{\epsilon_0 e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikp}}{p} ik \cos(\hat{n}, \hat{p}) dS - \oint_S \frac{\epsilon_0}{p} e^{ikp} \frac{e^{ikr}}{r} ik \cos(\hat{n}, \hat{r}) dS \right]$$

$$\text{i.e. } \tilde{E}_p = \frac{i\epsilon_0}{\lambda} \left[\oint_S \frac{e^{ik(p+r)}}{rp} \frac{\cos(\hat{n}, \hat{p}) - \cos(\hat{n}, \hat{r})}{2} \right] dS \quad \star$$

• 当 $p, r \gg \lambda$ 时, $\frac{1}{p}$ 与 $\frac{1}{r}$ 可忽略. (菲涅耳近似)

$$\text{by } \tilde{E}_p = -\frac{\epsilon_0 i}{\lambda} \oint_S \frac{e^{ik(p+r)}}{pr} \left[\frac{\cos(\hat{n}, \hat{r}) - \cos(\hat{n}, \hat{p})}{2} \right] dS \quad \text{菲涅耳-基尔霍夫衍射}$$

倾斜因子 $K(\theta)$

$$\text{其微分元为 } d\tilde{E}_p = -\frac{\epsilon_0 i}{\lambda} \frac{e^{ik(p+r)}}{pr} K(\theta) dS \quad (-i = e^{-\frac{\pi}{2}i})$$

$$\text{乘以时间扰动项 } e^{-i\omega t} = e^{-iket} \quad \text{得 } d\tilde{E}_p = \frac{\epsilon_0 K(\omega)}{\lambda} \frac{e^{i[k(p+r) - \omega t - \frac{\pi}{2}]} dS$$

$$\therefore (-i) = e^{-\frac{\pi}{2}i}, \quad \text{取实部得: } d\tilde{E}_p = \frac{\epsilon_0 K(\omega)}{pr\lambda} \cos[k(p+r) - \omega t - \frac{\pi}{2}] dS$$

< 距离 P 点 r 外的面元 dS 产生的扰动对 $\tilde{E}_p$ 的贡献

我们还必须保证能够使曲面 S 对应于波阵面的不受阻挡的部分, 如同在惠更斯-菲涅耳原理中那样。对于从点源 S 发出的自由传播的球面波, 构建图 10.89 所示的双连通区域。曲面 S_2 完全包围了小球面 S_1 。在 $p=0$ 处, 扰动 $E(p, t)$ 有一个奇点, 因此完全被排除在 S_1 和 S_2 之间的体积 V 之外。面积分现在必定包括两个曲面 S_1 和 S_2 。但是现在可以让 S_2 向外无限增大, 让它的半径趋于无穷。这时它对面积分的贡献为零。(不论入射扰动的形式如何, 只要它下降得至少同球面波一样快, 这个结论就成立。) 余下的曲面 S_1 是中心在点光源的一个球面。由于在 S_1 上 $\hat{n}$ 和 $\hat{p}$ 反平行, 由图 10.88b 显然有, 角 $(\hat{n}, \hat{r})$ 和 $(\hat{n}, \hat{p})$ 分别是 θ 和 180° 。于是倾斜因子变成

$$K(\theta) = \frac{\cos \theta + 1}{2}$$

即 (10.72) 式。显然, 由于进行积分的曲面 S_1 以 S 为中心, 它的确相当于某一时刻的球形波阵面。因此惠更斯-菲涅耳原理可以直接追溯到标量波动微分方程。

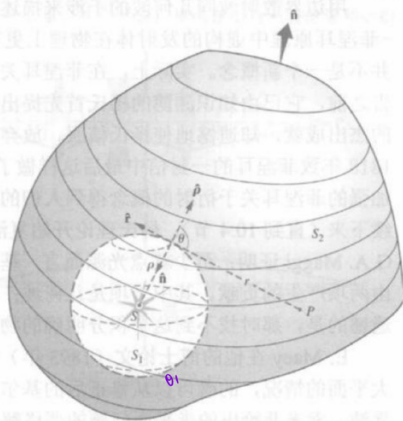


图 10.89 包围 S 点的双连通区域

$$\begin{cases} \langle \hat{n}, \hat{r} \rangle = \theta \\ \langle \hat{n}, \hat{p} \rangle = \pi \end{cases} \Rightarrow K(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

• 光孔与接收范围满足傍轴条件时: $\theta \approx \theta_0 = 0, r = r_0$

$$\tilde{E}_p \approx -\frac{\epsilon_0 i}{\lambda r_0} \iint_S \frac{e^{ik(p+r)}}{p} dS$$

$$\text{• 当 } r \gg p \gg \lambda \text{ 时, } d\tilde{E}_p = \frac{\epsilon_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS$$

菲涅耳衍射

Ex 10.69 10.70.

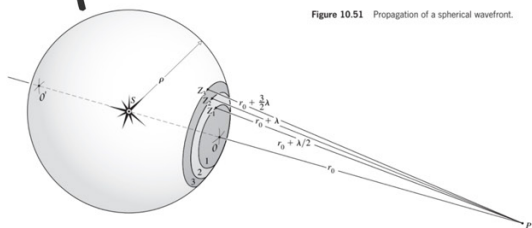


Figure 10.51 Propagation of a spherical wavefront.

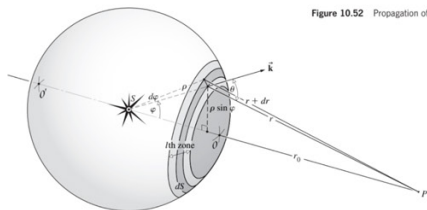


Figure 10.52 Propagation of a spherical wavefront.

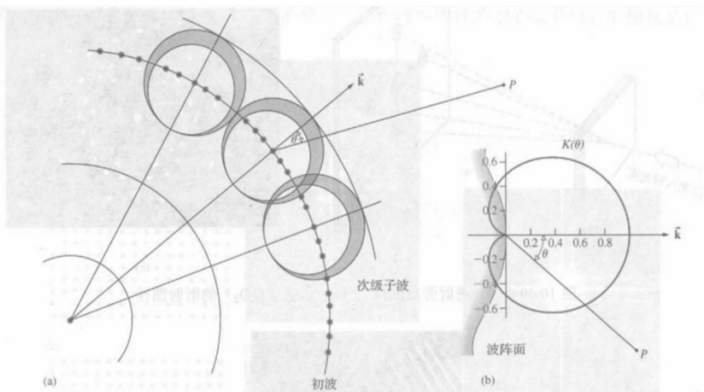


图 10.50 (a) 次级子波; (b) 倾斜因子 $K(\theta)$

考虑单点光源 S 。图中初始时刻 $t=0$ 时刻 S 发出的光在 t 时的波阵面

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \quad K(0) = 1, \quad K(\pi/2) = 0.$$

于是波面上任一点 $E = \frac{\epsilon_0}{r} \cos(\omega t - kp)$

如图把波阵面分为环带，分界线为波阵面与球心在 P ，半径为 $r_0 + \frac{\lambda}{2}, r_0 + \lambda, r_0 + \frac{3\lambda}{2}, \dots$ 的球面的交线。

再把半波带分为无数面元 dS 。 dS 内一切光源相干；相邻半波带间点源一一对应。(次级)。

子波经过 r ，在 t 时刻到达 P 点。所有子波以同相位 $\omega t - k(p+r)$ 到达。

设子波源强度 $\propto \frac{\epsilon_0}{r}$ ， i.e. $E_0 = \frac{\epsilon_0}{r}$

则 dS 上子波源对 P 点扰动的贡献为： $dE = K \frac{\epsilon_0}{r} \cos(\omega t - k(p+r)) dS$

近似：在一个半波带内 $K \approx \cos\theta$

$\times dS \approx p dy \, 2\pi p \sin\theta$

余弦定理， $r^2 = p^2 + (p+r_0)^2 - 2p(p+r_0)\cos\theta$ } $\rightarrow dS = 2\pi \frac{p}{p+r_0} r dr$

微分 $2r dr = 2p(p+r_0) \sin\theta d\theta$

故第 l 个波带到达 P 点扰动为： $E_l = K_l \epsilon_0 \frac{2\pi p}{(p+r_0)} \int_{r_{l-1}}^{r_l} \cos(\omega t - k(p+r)) dr$

由上， $r_l = r_0 + \frac{l}{2}\lambda$ ， $r_{l-1} = r_0 + \frac{l-1}{2}\lambda$

$$\begin{aligned} E_l &= \frac{K_l \epsilon_0 p \lambda}{p+r_0} \operatorname{Im} \left[e^{i(\omega t - kp - kr_0 - \frac{kl}{2}\lambda)} - e^{i(\omega t - kp - kr_0 - \frac{k(l-1)}{2}\lambda)} \right] \\ &= e^{i(\omega t - kp - kr_0)} e^{-i\frac{k\lambda}{2}} \left(1 - e^{i\frac{k\lambda}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{l+1} \frac{K_l \epsilon_0 p \lambda}{p+r_0} \sin[\omega t - k(p+r_0)]$$

10

注意，根据 l 是奇数还是偶数， E_l 的振幅正负交替变化，这意味着来自相邻波带的贡献互相抵消，因而倾向于抵消。正是在这里倾斜因子成了重大的差别。当 l 增大时， θ 增大而 K 减小，因此相邻两波带的贡献实际上不会彼此完全抵消。值得注意的是， E_l/K_l 与任何位置变量无关。虽然各波带的面积差不多相等，但随着 l 增大它们确实也增大一点，这意味着发射体数目的增加。但从各个波带到 P 点的平均距离也增大，使 E_l/K_l 保持不变（见习题 10.70）。

所有 m 个波带在 P 点产生的光扰动之和为

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_m$$

由于它们的符号交替变化，可以把它写作

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \dots \pm |E_m| \quad (10.77)$$

若 m 是奇数，这个级数可以用两种方式改写，一种方式是

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) + \frac{|E_m|}{2} \quad (10.78)$$

另一种方式是

$$E = |E_1| - \left(\frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) \right) - \left(\frac{|E_4|}{2} - |E_5| + \frac{|E_6|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{|E_{m-3}|}{2} - |E_{m-2}| + \frac{|E_{m-1}|}{2} \right) - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m| \quad (10.79)$$

m 为奇数，近似 $E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2}$

详见 P611

m 为偶数，近似 $E \approx \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2}$

P612 振动曲线

(无阻挡时也适用)

圆孔

Ex 10.70

10.70 参看图 10.52, 在第 l 带对 $dS = 2\pi\rho^2 \sin\phi d\phi$ 积分, 得到带的面积为

$$A_l = \frac{\lambda\pi\rho}{\rho + r_0} \left[r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4} \right]$$

证明到第 l 带的平均距离为

$$r_l = r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4}$$

所以比值 A_l/r_l 为常数。

假定 P 点的探头“看见”有 m (整数) 个波带填满孔径。实际上, 探头只记录 P 点的辐照度, 波带并不是真实的。若 m 是偶数, 则由于 $K_m \neq 0$,

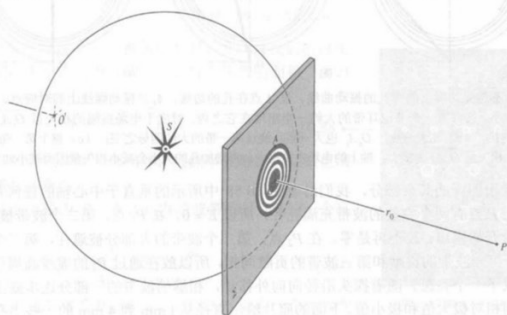


图 10.56 圆孔

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \dots + (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

因为任意相邻两个带的贡献差不多相等, 因此

$$E \approx 0$$

及 $l \approx 0$ 。另一方面, 若 m 是奇数

$$E = |E_1| - (|E_2| - |E_3|)$$

$$- (|E_4| - |E_5|) - \dots - (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

$$\text{所以 } E \approx |E_1|$$

$$\begin{cases} m \text{ 奇}, E \approx |E_1| \\ m \text{ 偶}, E \approx 0 \end{cases}$$

每个半波带面积 $A \approx \frac{\rho}{\rho + r_0} \pi r_0 \lambda$

若孔径为 R , 则孔内半波带数 $N_F = \frac{\pi R^2}{A} = \frac{(\rho + r_0) R^2}{\rho r_0 \lambda}$ 又称“菲涅尔数”

当 $N_F \ll 1$ 时, 发生夫琅禾费衍射; $N_F \gg 1$ 时得到菲涅尔衍射。

归一化夫琅禾费衍射辐照度为 1。详见 P617 上, 有图。

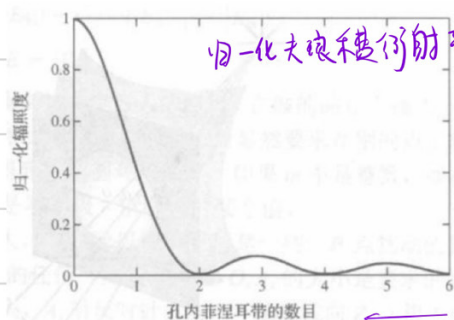
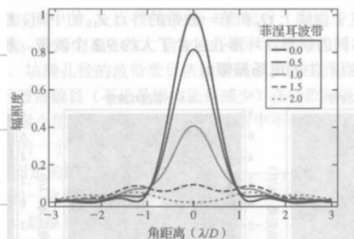
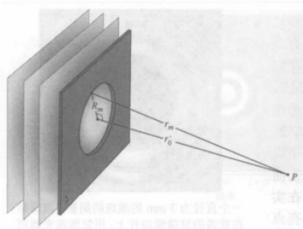


图 10.59 圆孔直径固定时, 轴上一点 P 移向 O , 引起孔内的菲涅尔波带数增加, P 点的辐照度发生变化



平面波: 光源距衍射屏很远, $\rho \rightarrow \infty$ $N_F = \frac{R^2}{r_0 \lambda}$



$$\text{由 } r_m = r_0 + \frac{m\lambda}{2}$$

$$\text{得 } R_0^2 = (r_0 + \frac{m\lambda}{2})^2 - r_0^2$$

$$= m r_0 \lambda + \frac{m^2 \lambda^2}{4}$$

$$= m r_0 \lambda \quad (m \text{ 较小时})$$

(m 较大时 $N_F \approx 0$ 取.)

例10.2 两条平行的长狭缝,宽度为 b , 间隔 $a=0.100\text{ mm}$. 用黄色钠光 ($\lambda=589.6\text{ nm}$) 的平面波垂直照明. 在远处的屏上的条纹图样总共共有 9 个窄的极大, 其亮度在中心峰的两侧逐渐减弱. 求狭缝的近似宽度.

解
单缝衍射的公式 $b \sin \theta_{mD} = m \lambda$, 下标 D 表示衍射. 双缝干涉公式 $a \sin \theta_{mI} = m \lambda$, 下标 I 表示干涉. 有 9 个极大, 主峰左右各有 4 个辅峰, 所以 $m_I = \pm 4$. 衍射主峰的边缘 (θ_{1D}) 对应于第 4 个干涉峰的边缘 (θ_{4I}), 所以

因而

$$\sin \theta_{4I} = \sin \theta_{1D}$$

所以

$$\frac{4\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b}$$
$$4b = a$$
$$b = \frac{0.100}{4} \text{ mm}$$

所以 $b = 0.025\text{ mm}$.

例题 10.4 一个不透光的屏上有 7 条靠得很近的平行狭缝. 用单色光照射, 在远处的屏上出现夫琅禾费图样. (a) 在零阶和一阶主极大之间有多少个辅照度峰? (b) 假定每条狭缝都是无穷窄的, 比较最小的照度辅极大和照度主极大.

解
(a) 相邻两个主极大之间有 $(N-2)$ 个辅极大. 此外有 $(7-2) = 5$ 个小峰处在 $m=0$ 和 $m=1$ 的主极大中间. (b) 当 N 是大于 2 的奇数时, 总有一个辅照度的辅极大落在两个主峰之间. 这时 7 个相矢量中的 6 个相互反平行, 互相抵消, 合电场振幅为 $1E_{01}$. 这就是最小的辅极大. 在主极大时 7 个相矢量排成一条直线, 合振幅为 $7E_{01}$. 所以对应的照度之比为 $1^2/7^2 = 1/49$.

例题 10.5 图 10.30 中不透光屏上的小孔大小, y 方向为 0.120 mm , z 方向为 0.240 mm . 用氦氖激光器波长 543 nm 的光照明. 一面焦距为 1.00 m 的大正透镜把夫琅禾费衍射图样投射在其焦平面的屏上. 求在屏上 $Y=2.00\text{ mm}$, $Z=3.00\text{ mm}$ 地方的相对照度 $I(Y, Z)/I(0)$.

解
从 (10.43) 式

$$I(Y, Z) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)^2$$

其中, $\alpha' = k a Z / 2R$ 和 $\beta' = k b Y / 2R$. 现在 $R \approx f$, $a = 0.240\text{ mm}$, $b = 1.20\text{ mm}$, 所以

$$I(Y, Z) = I(0) \left[\frac{\sin(\pi a Z / f \lambda)}{\pi a Z / f \lambda} \right]^2 \left[\frac{\sin(\pi b Y / f \lambda)}{\pi b Y / f \lambda} \right]^2$$
$$\frac{I(Y, Z)}{I(0)} = \left[\frac{\sin(1388.5Z)}{1388.5Z} \right]^2 \left[\frac{\sin(694.27Y)}{694.27Y} \right]^2$$
$$\frac{I(Y, Z)}{I(0)} = \left(\frac{-0.8541}{4.1655} \right)^2 \left(\frac{0.9834}{1.3885} \right)^2$$
$$= (0.2050)^2 (0.7082)^2$$

例题 10.8 波长从 400 nm 到 600 nm 的多色光垂直入射到每米 500 000 个刻痕的透射光栅. 附近的一个正透镜将透射光在其焦平面的屏幕上生夫琅禾费衍射图样. 要使二级光谱展开 2.00 cm 长, 透镜的焦距应该多大? 讨论图样的颜色相对于中心轴的顺序.

解
光栅方程

$$a \sin \theta_m = m \lambda$$

是主极大. 二级谱的 $m=2$. 令 $Y_2(400)$ 和 $Y_2(600)$ 为屏上中心轴到这两个极端波长位置的距离, 因此,

$$Y_2(600) - Y_2(400) = 2.00 \times 10^{-2} \text{ m}$$

令 $\theta_2(\lambda)$ 是波长 λ 离开中心轴线的角度:

$$\tan \theta_2 = Y_2 / R = Y_2 / f$$

因为

$$a \sin \theta_2 = 2 \lambda$$
$$\sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{Y_2}{a}$$

和

$$\frac{Y_2}{f} = \frac{2 \lambda}{a}$$

这里 $a = 1 / 500000 = 2.00 \times 10^{-6}$, 所以

$$Y_2(600) = \frac{2(600 \times 10^{-9})f}{2.00 \times 10^{-6}} = 0.60f$$
$$Y_2(400) = \frac{2(400 \times 10^{-9})f}{2.00 \times 10^{-6}} = 0.40f$$

及

$$2.00 \times 10^{-2} \text{ m} = Y_2(600) - Y_2(400) = 0.20f$$

由此得 $f = 0.10\text{ m}$.

λ 越大, θ_m 越大, 谱线离中心轴线越远. 所以紫色离中心轴最近, 红色离中心轴最远.

例题 10.9 我们希望在透射光栅的二级谱中把钠的两根亮黄线 (589.5923 nm 和 588.9953 nm) 分开, 这个光栅最少需要几条狭缝或刻痕?

解
光栅的分辨本领为 $\lambda/(\Delta\lambda)_{\min}$, 其中 λ 是平均波长 $\frac{1}{2}(589.5923 + 588.9953)\text{ nm} = 589.2938\text{ nm}$. $(\Delta\lambda)_{\min} = (589.5923 - 588.9953)\text{ nm} = 0.597\text{ nm}$. 从 (10.67) 式, $m=2$,

$$\frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = mN$$
$$N = \frac{589.2938\text{ nm}}{2(0.597\text{ nm})}$$
$$N = 493.5$$

所以
光栅最少需要要有 494 条狭缝才能把这两条谱线分开.

See light W12 EX.

1、(3-11) 在焦距 $f=1.2\text{ m}$ 的会聚透镜的象方焦点上, 观察缝宽为 $a=0.48\text{ mm}$ 的单缝夫琅和斐衍射, 已知入射光包含两种波长 λ_1 和 λ_2 , λ_1 的第四个极小与 λ_2 的第五个极小出现在距中央主极大 $x=4.5\text{ mm}$ 的同一点, 试由此求出 λ_1 和 λ_2 (nm 作为单位). (设 λ_1 的第四个极小位置与中央主极大的角距离为 θ_1 , λ_2 的第五个极小位置与中央主极大的角距离为 θ_2)

单缝衍射 极小: $a \sin \theta = m \lambda$

由 $a \cos \theta \Delta \theta = m \Delta \lambda$ $\rightarrow \Delta \theta = \frac{m \Delta \lambda}{a \cos \theta}$

$x = D \cdot \theta = f \cdot \theta = \frac{m f}{a \cos \theta}$

代入 $m=4$ 和 $m=5$ 得 θ_1, θ_2

2、(3-14) a) 当缝宽为一个波长时, 单缝的夫琅和斐衍射的半值 (指 $I=I_0/2$) 角宽度 θ_1 有多大? $d=\lambda$
b) 当缝宽为 $n=16$ 个波长时, 单缝的夫琅和斐衍射的半值 (指 $I=I_0/2$) 角宽度 θ_2 有多大?

提示: $\theta = \sin^{-1}(\lambda/a)$ 时, $I=I_0/2$
1) $I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$, $\beta = \frac{k b \sin \theta}{2}$, $d=\lambda$
 $I(\theta) = \frac{1}{2} I_0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) 同理, $b=16\lambda$ 时.

3、(3-27) 钠黄光包括 $\lambda_1=589.00\text{ nm}$ 和 $\lambda_2=589.55\text{ nm}$ 两条谱线. 使用 $L=99.1\text{ mm}$ 长, 光栅的刻线密度 $n=612$ 的光栅. 求一级光谱中两条谱线的位置、间隔和半角宽度各为多少?

$N = L n$, $a = \frac{1}{n}$ 为缝间距.

由 $a \sin \theta = m \lambda$, 代入 $m=1$, 分别代入 λ_1, λ_2 可分别得 θ_1, θ_2

$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta \theta = \frac{\Delta \lambda}{a \cos \theta}$

由主极大 $\frac{\sin N \alpha}{\sin \alpha} = N$, 得 $\sin \theta = \frac{m \lambda}{N a}$, $\Delta \theta = \frac{\lambda \Delta \alpha}{N a \cos \theta}$

例题 12 一个 15 cm 宽的光栅, 每 mm 内有 1200 个衍射单元, 在可见光波段的中部 ($\lambda \approx 550\text{ nm}$) 此光栅能分辨的最小波长差为多少?

例题 13 用以上例题中的光栅作为分光元件, 组成一台光栅光谱仪. 如果用照相底片摄谱, 由于乳胶颗粒密度的影响, 感光底片的空间分辨本领为 200 条/mm , 为了充分利用光栅的色分辨本领, 这台光谱仪的焦距至少要多长?

$a = \frac{1}{1200} \text{ mm}$, $N = 1200 \cdot 150 = 1.8 \times 10^5$, $\lambda = 550\text{ nm}$.

由 $a \sin \theta_m = m \lambda$, $\Delta \theta = \frac{\Delta \lambda}{a \cos \theta}$

得 $\Delta \lambda = \frac{a \cos \theta}{m} \Delta \theta = \frac{\Delta \lambda}{N}$, $\Delta \theta = \Delta \theta$ 时达分辨率极限, $\Delta \lambda = (\lambda)_{\min}$

eg. 故 $\Delta \lambda_{\min} = \frac{a \cos \theta}{m} \Delta \theta = \frac{\Delta \lambda}{N}$, 代入 $m=1$ 即可.

充分利用 "把 $\Delta \lambda = \Delta \lambda_{\min}$ 的两谱线分开 $\Delta l = \frac{1}{200} \text{ mm}$, $D_1 = \frac{\Delta l}{\Delta \lambda}$

$D_1 = D_0 f' = \frac{m}{a \cos \theta} f'$, 可解得 f'

例题 11 钠黄光包括 $\lambda=598.00\text{ nm}$ 和 $\lambda'=598.59\text{ nm}$ 两条谱线. 使用 15 cm 、每毫米内有 1200 条缝的光栅, 一级光谱中两条谱线的位置、间隔和半角宽度各多少?

$N = 1200 \cdot 150 = 1.8 \times 10^5$ 一级光谱 $m=1$.

位置: $a \sin \theta_m = m \lambda$, 代入 $m=1$, a, λ 即可得 $\sin \theta$, 解出 θ .

半角宽: $\Delta \theta = \frac{\Delta \lambda}{a \cos \theta}$, 代入 λ, a, θ 即可.

角间隔: 由 $a \sin \theta_m = m \lambda$ $\rightarrow \Delta \theta$, $a \cos \theta \Delta \theta = m \Delta \lambda$, 代入可得 $\Delta \theta$.

例题 10.6 不透光的屏上有一圆孔, 直径为 4.98 mm , 用氦氖激光器的光 ($\lambda_0=543\text{ nm}$) 垂直照明, 在远处的屏上生成夫琅禾费衍射图样. 求爱里斑的角宽度 $2\Delta\theta_1$. 如果孔小至 $\frac{1}{10}$, 情况如何?

解
我们知道 $\sin \theta = q/R$. 令 $\Delta\theta_1$ 为爱里斑的角宽度之半. 利用 (10.57) 式

$$\sin \Delta\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{2a} = \frac{q_1}{R}$$

对小角度, $\sin \Delta\theta_1 \approx \Delta\theta_1$, 所以

$$2\Delta\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}$$

这里

$$2\Delta\theta_1 = 1.22 \frac{543 \times 10^{-9} \text{ m}}{2.49 \times 10^{-3} \text{ m}}$$
$$2\Delta\theta_1 = 2.66 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

所以
最后, 当 $a = 0.498\text{ mm}$, $2\Delta\theta_1 = 2.66 \times 10^{-3}$ 弧度. 孔越小, 爱里斑越大.